UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 5 - Funções de Várias Variáveis

Pontos Críticos, Máximos e Mínimos, Multiplicadores de Lagrange

1 — Determine e classifique os pontos críticos das funções abaixo relacionadas:

(a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5$

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$

(c) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 12x + 10$

(d) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

2 — Encontre o máximo e mínimo global de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = sen(x) + sen(y) + sen(x+y); 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2.$

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, na região triangular de vértices $(0,0),(0,1)(1,0)$.

(c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}, |x| \leq 1, |y| \leq 1.$

3 — Foi encomendado para sua empresa o projeto de um tanque para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente pedem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas que contenham 8.000 m^3 de gás. O cliente também quer usar a menor quantidade possível de material para construir o tanque. Qual raio e altura da parte cilíndrica você recomendaria para o tanque?

4 — Determine o volume máximo de uma caixa retangular inscrita no elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

5 — De uma folha de alumínio com 12 cm de largura, deseja-se construir uma calha , dobrando-se os lados da folha para cima e formando duas abas de mesmo tamanho, de modo que estas abas façam o mesmo ângulo com a horizontal. Qual a largura das abas e que ângulo elas devem fazer com a horizontal, para que a capacidade da calha seja máxima?

6 — Determine os valores máximo e mínimo, se existem, das funções relacionadas sujeitas ao respectivo vínculo indicado:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 4$

(b) $f(x,y) = xy, 4x^2 + 9y^2 = 36$

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, 3x + 2y + z = 6$

(d) $f(x,y,z) = x + y + z, x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

7 — A janela de uma casa tem o formato de um retângulo com um triângulo isósceles no topo. Se o perímetro da janela é $12m$ e esta deve coletar a maior quantidade de energia solar possível, mostre que o ângulo da base do triângulo é $\frac{\pi}{6}$ radianos.

8 — Determine a equação do plano que passa por $(1,2,1)$ e determina com os planos coordenados um tetraedro de volume mínimo. Como você justifica que tal volume é, de fato, mínimo?

9 — Suponha que a temperatura em um ponto (x,y) de uma placa de metal seja dada por $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga, andando sobre a placa, percorre uma circunferência de raio 5 centrada na origem. Quais são a maior e a menor temperaturas encontradas pela formiga?

10 — Considere a curva C dada pela intersecção do cilindro de equação $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ com o plano $2x + y + z = 12$ .Determine as distâncias máximas e mínimas dos pontos de C ao plano xy.

11 — Numa circunferência C de centro O e raio R, traçam-se duas cordas paralelas ℓ_1 e ℓ_2 em lados opostos de um diâmetro de C. Em seguida, constrói-se um trapézio isósceles de bases ℓ_1 e ℓ_2. Determine a distância de O às cordas ℓ_1 e ℓ_2, para que a área do trapézio seja máxima.

12 — Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeita aos vínculos $x + y + z = 1$ e $x + 2y + 3z = 6$.

13 — Se f for uma função contínua de uma variável com dois máximos relativos num intervalo, então deve haver um mínimo relativo entre eles. Este resultado não se estende a função de duas vairáveis. De fato, mostre que $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ tem dois máximos relativos, mas nenhum outro ponto crítico.

Respostas dos Exercícios

1 (a) Mínimo global em (-1,2).

(b) Máximo local em (-1,-1), ponto de sela em (0,0).

(c) Ponto de sela em (-1,0) , mínimo local em (2,0).

(d) Ponto de sela em (0,0), mínimos locais em $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, máximos locais em $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

2 (a) Máximo $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ em $(\frac{\pi}{3})$,$(\frac{\pi}{3})$, mínimo 0 em $(0,0)$.

(b) Máximo 1 em $(0,1)$ e $(1,0)$, mínimo $-\frac{1}{2}$ em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) Máximo e^3 em $(1,1)$ e $(-1,1)$, mínimo $e^{-\frac{1}{4}}$ em $(0,-\frac{1}{2})$.

3 $h = 0$ e $R = 10\sqrt[3]{6/\pi} \cong 12,4m$

4 $V = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$

5 $L = 4$ cm e $\theta = \frac{\pi}{3}$ radianos.

6 (a) Máximo 4 em $(\pm 2, 0)$, mínimo -4 em $(0, \pm 2)$.

(b) Máximo 3 em $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ e $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$,mínimo -3 em $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ e $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$.

(c) Mínimo $\frac{18}{7}$ em $(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7})$.

(d) Máximo 7 em $(\frac{36}{7}, \frac{9}{7}, \frac{4}{7})$ e mínimo -7 em $(-\frac{36}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{4}{7})$.

7 $\theta = \pi/6$

8 $2x + y + 2z = 6$

9 $125°$ nos pontos $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ e $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$, e $0°$ nos pontos $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ e $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

10 20 e 4

11 Distâncias iguais a $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

12 A função tem um mínimo em $(-5/3, 1/3, 7/3)$.

13 Os únicos pontos críticos são $(-1,0)$ e $(1,0)$, pontos de máximo da f.