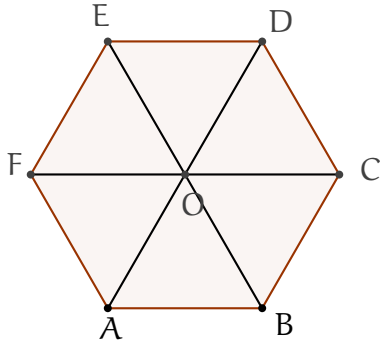


Lista 4 - Geometria Analítica

Vetores em Coordenadas

1 — Dado o hexágono regular $ABCDEF$ de centro O , conforme a figura abaixo:



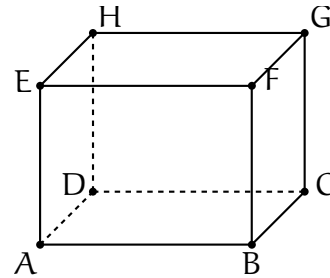
Determine as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D, E e F nos seguintes sistemas de coordenadas:

- $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$
- $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$
- $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$
- $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$

2 — Encontre as coordenadas dos seguintes vetores nos sistemas de coordenadas do exercício anterior:

- \overrightarrow{CD}
- \overrightarrow{BD}
- \overrightarrow{AC}
- \overrightarrow{BE}

3 — Dado o paralelogramo retângulo $ABCDEFGH$ abaixo. Sejam $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AF}$, $\mathbf{e}_4 = \overrightarrow{AE}$.



Determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H nos seguintes sistemas de coordenadas:

- $(A; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$
- $(A; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$
- $(A; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$
- $(H; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$
- $(G; -\mathbf{e}_4; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; 3\mathbf{e}_3)$
- $(A; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; \frac{1}{2}\mathbf{e}_2; \frac{1}{2}\mathbf{e}_3)$

4 — Sob as mesmas hipóteses do exercício anterior, determine as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{EH}$ nos seguintes sistemas de coordenadas:

- $(A; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$
- $(A; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$
- $(H; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$
- $(H; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$
- $(G; -\mathbf{e}_4; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; 3\mathbf{e}_3)$

5 — Os pontos médios dos lados de um triângulo são $(2, 5)$, $(4, 2)$ e $(1, 1)$. Determine as coordenadas dos três vértices.

6 — Dados dois pontos $P : (x_1, y_1, z_1)$ e $Q : (x_2, y_2, z_2)$, encontre a coordenada do ponto R , que se encontra sobre o segmento lig-

ando os pontos P e Q e tal $d(R, Q) = \lambda d(R, P)$.

7 — Prove utilizando coordenada que o segmento de reta que une os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

8 — Determine quais dos conjuntos abaixo são L.I.

- a) $\{(1, -1, 2), (1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$
- b) $\{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 2, 2)\}$
- c) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 0, 5)\}$

9 — Exprima o vetor $\mathbf{w} : (1, 1)$ como combinação linear de $\mathbf{u} : (2, -1)$ e $\mathbf{v} : (1, -1)$.

10 — Sejam $\mathbf{u} = (2, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 3)$. Mostre que todo vetor (c_1, c_2) pode ser expresso como combinação linear de \mathbf{u}, \mathbf{v}

11 — Sejam $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$ vetores no espaço.

- a) encontre as componentes de um vetor $\mathbf{z} = (a, b, c)$ na base formada por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.
- b) Mostre que se $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ então as componentes de \mathbf{z} na base formada por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são todas iguais a zero.
- c) encontre as componentes de um vetor $\mathbf{z} = (1, 2, 3)$ na base formada por \mathbf{u}, \mathbf{v} , e \mathbf{w} .

12 — Mostre que dois vetores não nulos $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ são LD se e somente se existe λ tal que:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3)$$

Utilize esse critério para decidir se os vetores abaixo são LI ou LD:

- a) $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$
- b) $\mathbf{u} = (1, 0, 3)$ $\mathbf{v} = (-2, 0, -6)$
- c) $\mathbf{u} = (1, 2, 5)$ $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4})$

13 — Determine m, n de modo que os vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} sejam LD, onde:

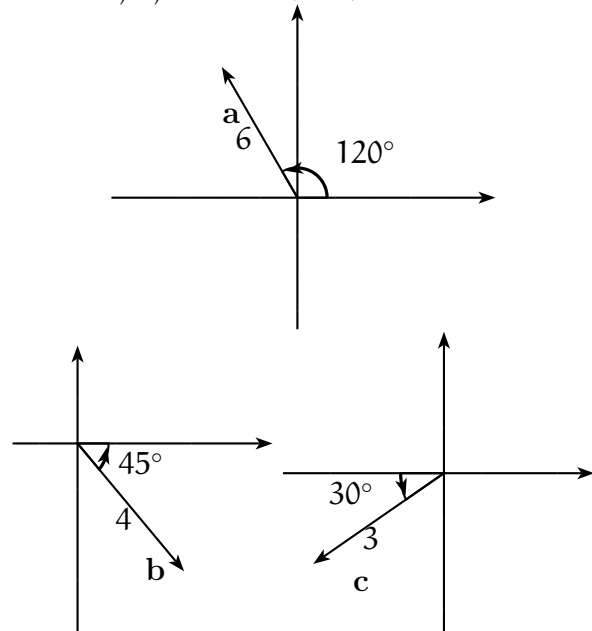
- a) $\mathbf{v} = (1, m, n+1)\mathbf{w} = (m, n, 2)$
- b) $\mathbf{v} = (1, m-1, m)\mathbf{w} = (m, n, 4)$

14 — Dado $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base. Determine condições necessárias e suficientes sobre a, b de modo que os vetores $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sejam LI, com $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ dados por:

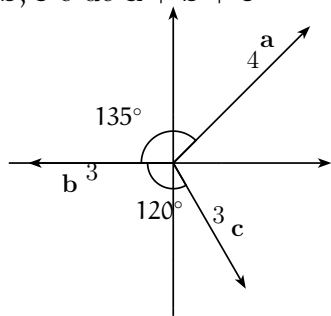
- a) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{w} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$
- b) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \mathbf{w} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + (b^2 + 2a)\mathbf{e}_3$

Nos próximos exercícios, as coordenadas são expressas num sistema cartesiano.

15 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ conforme a figura abaixo. Determine as componentes dos vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e de $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$



16 — Dados os vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} conforme a figura abaixo. Determine as componentes dos vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} e de $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$



17 — Dados $A : (4, 8, 11)$, $B : (-3, 1, 4)$ e $C : (2, 3, -3)$ desenhe o triângulo ABC e ache:

- O comprimento dos três lados do triângulo;
- Os pontos médios dos três lados do triângulo;

- Os vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{CA} ;
- A soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. Porque essa soma deve ser zero?;
- Os ângulos entre \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} . Dica: use a lei dos cossenos;
- A área do triângulo;
- O ponto D tal que $ABCD$ é um paralelogramo (Três respostas)

18 — O triângulo ABC , com $A = (-\mathbf{a}; 0)$, $B = (\mathbf{a}; 0)$, $C = (0; \mathbf{y})$ é equilátero. Quais são os possíveis valores de \mathbf{y} ?

19 — Três vértices de um retângulo são $(2, -1)$, $(7, -1)$ e $(7; 3)$: Determinar o quarto vértice e a área.

Respostas dos Exercícios

1 a.) Começando pelos mais simples, temos

$$O = (0, 0)$$

(origem do sistema de coordenadas) e

$$C = O + \overrightarrow{OC} = O + \overrightarrow{OC} + 0\overrightarrow{OD},$$

e portanto

$$C = (1, 0).$$

Do mesmo modo encontramos

$$D = (0, 1).$$

Note agora que

$$B = O + \overrightarrow{OB} = O + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = O + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD},$$

de onde segue que

$$B = (1, -1).$$

Observando que $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OB}$ concluímos que

$$A = (0, -1), F = (-1, 0) \text{ e } E = (-1, 1).$$

b.) $O = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $E = (0, 1)$, $D = (1, 1)$, $A = (-1, -1)$, $B = (0, -1)$ e $F = (-1, 0)$.