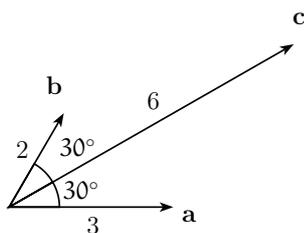


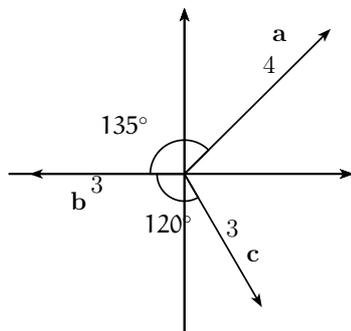
# Lista 2 - Geometria Analítica

## Dependência e Independência Linear de Vetores

1 — Dados os vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  como na figura abaixo. Escreva o vetor  $\mathbf{c}$  como combinação de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

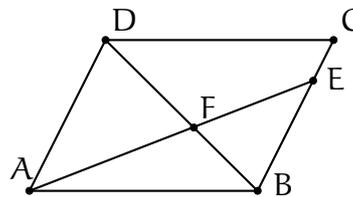


2 — Dados os vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  como na figura abaixo. Escreva o vetor  $\mathbf{c}$  como combinação de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .



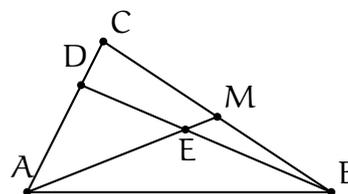
3 — Considere um paralelogramo  $ABCD$ . Seja  $E$  o ponto sobre o segmento  $BC$  tal que a distância de  $B$  a  $E$  é três vezes a distância de  $E$  a  $C$ . Seja  $F$  a intersecção de  $AE$  com a diagonal  $BD$ . Se  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$  e  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ , escreva o vetor  $\overrightarrow{AF}$  em função de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  usando:

- Geometria plana clássica (semelhança de triângulos);
- Geometria analítica (combinações lineares de vetores);

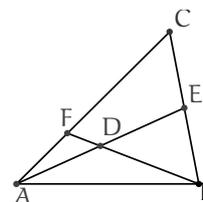


4 — Considere um triângulo  $ABC$ . Sejam  $M$  o ponto médio de  $BC$  e  $D$  o ponto sobre o segmento  $AC$  tal que a distância de  $D$  a  $A$  é três vezes a distância de  $D$  a  $C$ . Seja  $E$  a intersecção de  $AM$  com  $BD$ . Se  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$  e  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ , escreva o vetor  $\overrightarrow{AE}$  em função de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ .

*Cuidado! Não há triângulos semelhantes neste caso...*



5 — Seja  $D$  o ponto médio da mediana  $AE$  do triângulo  $\Delta ABC$ . Se a reta  $BD$  corta o lado  $\overline{AC}$  no ponto  $F$ , determine a razão que  $F$  divide  $\overline{AC}$ .



6 — Se  $\vec{AB} = \lambda \vec{BC}$ , prove que os vetores  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$  são LD para qualquer ponto O.

7 — Os pontos P e Q dividem os lados CA e CB de um triângulo  $\Delta ABC$  de modo que

$$\frac{\|\vec{CP}\|}{\|\vec{PA}\|} = \frac{x}{1-x}, \quad \frac{\|\vec{CQ}\|}{\|\vec{QB}\|} = \frac{y}{1-y}.$$

Prove que se  $\vec{PQ} = \lambda \vec{AB}$  então  $x = y = \lambda$ .

8 — Mostre que os vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

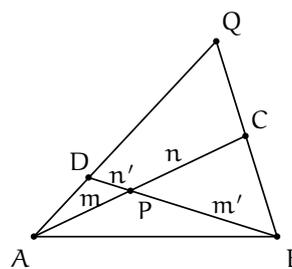
9 — Prove que se o conjunto de vetores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  é L.I., então o conjunto  $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$  também é L.I.

10 — Prove que se o conjunto de vetores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  é L.I., então o conjunto  $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - 2\mathbf{u}\}$  também é L.I.

11 — Dado um tetraedro ABCD explique por que os vetores  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  formam uma base para o espaço.

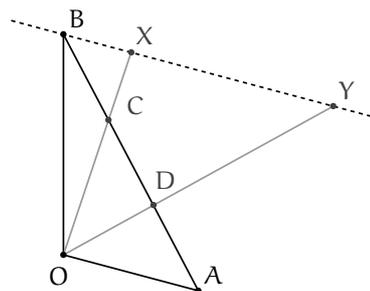
## Extras

12 — As diagonais  $\vec{AC}$  e  $\vec{BD}$  de um quadrilátero ABCD se interceptam no ponto P, que divide o segmento  $\vec{AC}$  na razão  $m : n$  e o segmento  $\vec{BD}$  na razão  $m' : n'$ . Dado Q o ponto de intersecção das retas contendo os segmentos  $\vec{BC}$  e  $\vec{AD}$ . Encontre a razão  $AQ : DQ$  e  $BQ : CQ$ .

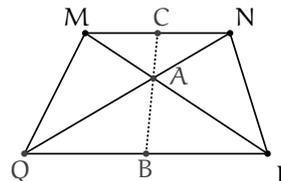


13 — Dado um triângulo  $\Delta OAB$ , sejam C e D pontos sobre o lado AB dividindo esse segmento em três partes congruentes. Por B traçamos a reta paralela a OA, e sejam X e Y a intersecção dessa reta com as retas ligando OC e OD respectivamente.

- Expresse os vetores  $\vec{OX}$  e  $\vec{OY}$  em função de  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ .
- Determine as razões nas quais X divide BY, C divide a OX e D divide a OY.



14 — Dado um paralelogramo MNPQ, seja A o ponto de intersecção das diagonais e sejam B e C os pontos médios dos lados opostos MN e PQ. Prove que se os pontos A, B e C estão sobre a mesma reta então MNPQ é um trapézio (um trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos).



15 — Sejam B um ponto no lado ON do

paralelogramo  $AMNO$  e  $C$  um ponto na diagonal  $OM$  tais que

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$$

e  $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+n}\overrightarrow{OM}$ . Prove que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão na mesma reta.

## Respostas dos Exercícios

1

$$\mathbf{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathbf{a} + \sqrt{3}\mathbf{b}$$

2

$$\mathbf{c} = -\frac{3\sqrt{6}}{8}\mathbf{a} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathbf{b}$$

3 (a) Note que  $\triangle AFD \approx \triangle EFB$ .

(b) Observe que, como  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  não são paralelos, eles formam uma base para os vetores no plano. Logo todos os demais vetores do problema podem ser escritos em função desses.

O problema de encontrar  $\overrightarrow{AF}$  está ligado a determinar onde fica o ponto F. Sobre esse tudo que sabemos é que é a intersecção dos segmentos BD e AE. Desse modo, para localizar F, precisamos inicialmente de duas equações:

- B, F e D são colineares:

$$\overrightarrow{BF} = \theta \overrightarrow{BD},$$

para algum  $\theta$  real.

- A, F e E são colineares:

$$\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AE},$$

para algum  $\lambda$  real.

(Note que  $\theta$  e  $\lambda$  não são necessariamente iguais!)

Escrevamos agora  $\overrightarrow{AF}$  e  $\overrightarrow{BF}$  em função de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\theta$  e  $\lambda$ . É fácil (por quê?) ver que:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$$

Então, relacionando  $\overrightarrow{AF}$  e  $\overrightarrow{BF}$  temos:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

donde segue:

$$\lambda \left( \mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b} \right) = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Colocando tudo à esquerda da igualdade e deixando  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  em evidência:

$$\mathbf{a}(\lambda + \theta - 1) + \mathbf{b} \left( \frac{3}{4}\lambda - \theta \right) = \mathbf{0}$$

Como  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são LI segue:

$$\begin{cases} \lambda + \theta - 1 = 0 \\ \frac{3}{4}\lambda - \theta = 0 \end{cases}$$

Finalmente, obtemos  $\lambda = \frac{4}{7}$  e

$$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{7}\mathbf{a} + \frac{3}{7}\mathbf{b}.$$

4

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{7}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

5 Considere  $\overrightarrow{FC} = \lambda \overrightarrow{AF}$ . Queremos determinar  $\lambda$ .

Sejam  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$  e  $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ , então temos:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AE}}{2} \text{ e } \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

e logo:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4}$$

Também temos que:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}}{1 + \lambda}$$

Como F, D e B são colineares então:

$$\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AD} + (1 - \alpha) \overrightarrow{AB}$$

e assim

$$\overrightarrow{AF} = \left(1 - \frac{3}{4}\alpha\right) \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\alpha \overrightarrow{AC}$$

E conseqüentemente  $1 - \frac{3}{4}\alpha = 0$  e  $\frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{1+\lambda}$  e assim  $\lambda = 2$ .

Logo F divide o segmento  $\overline{AC}$  na razão 1 : 2.

**6**  $\vec{OA} = (1 + \lambda)\vec{OB} - \lambda\vec{OC}$ .

**8** Resolvido nas notas de aula.

**9** Prove que a única combinação linear de  $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$  e  $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$  dando o vetor nulo tem os coeficientes todos nulos.

**11** Por que esses vetores são necessariamente LI?

**12**

$$\frac{\|AQ\|}{\|DQ\|} = \frac{(n + m)m'}{(n' + m')n} \quad \frac{\|BQ\|}{\|CQ\|} = \frac{(n' + m')m}{(n + m)n'}$$