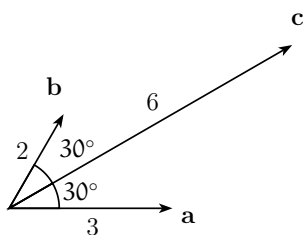


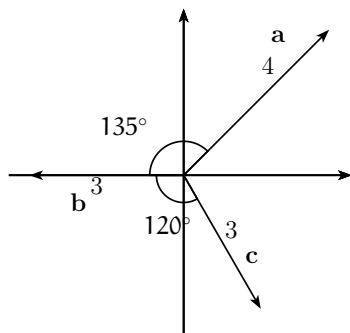
Lista 2 - Geometria Analítica

Dependência e Independência Linear de Vetores

1 — Dados os vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} como na figura abaixo. Escreva o vetor \mathbf{c} como combinação de \mathbf{a} e \mathbf{b} .

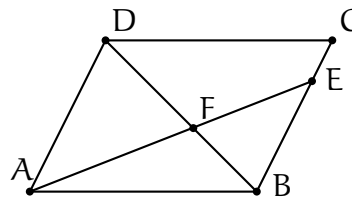


2 — Dados os vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} como na figura abaixo. Escreva o vetor \mathbf{c} como combinação de \mathbf{a} e \mathbf{b} .



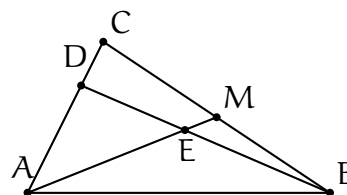
3 — Considere um paralelogramo $ABCD$. Seja E o ponto sobre o segmento BC tal que a distância de B a E é três vezes a distância de E a C . Seja F a intersecção de AE com a diagonal BD . Se $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ e $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, escreva o vetor \overrightarrow{AF} em função de \mathbf{a} , \mathbf{b} usando:

- Geometria plana clássica (semelhança de triângulos);
- Geometria analítica (combinações lineares de vetores);

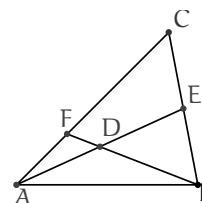


4 — Considere um triângulo ABC . Sejam M o ponto médio de BC e D o ponto sobre o segmento AC tal que a distância de D a A é três vezes a distância de D a C . Seja E a intersecção de AM com BD . Se $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, escreva o vetor \overrightarrow{AE} em função de \mathbf{a} , \mathbf{b} .

Cuidado! Não há triângulos semelhantes neste caso...



5 — Seja D o ponto médio da mediana AE do triângulo ΔABC . Se a reta BD corta o lado \overline{AC} no ponto F , determine a razão que F divide \overline{AC}



6 — Se $\vec{AB} = \lambda \vec{BC}$, prove que os vetores \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} são LD para qualquer ponto O.

7 — Os pontos P e Q dividem os lados CA e CB de um triângulo ΔABC de modo que

$$\frac{\|\vec{CP}\|}{\|\vec{PA}\|} = \frac{x}{1-x}, \quad \frac{\|\vec{CQ}\|}{\|\vec{QB}\|} = \frac{y}{1-y}.$$

Prove que se $\vec{PQ} = \lambda \vec{AB}$ então $x = y = \lambda$.

8 — Mostre que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

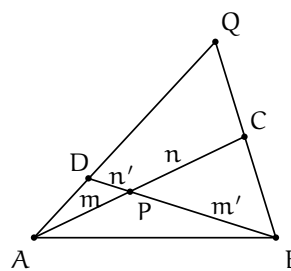
9 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$ também é L.I.

10 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - 2\mathbf{u}\}$ também é L.I.

11 — Dado um tetraedro ABCD explique por que os vetores $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ formam uma base para o espaço.

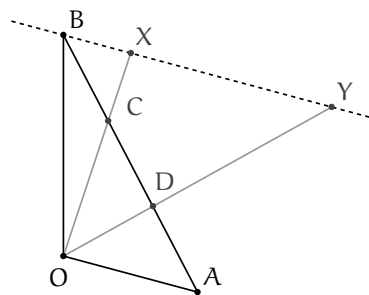
Extras

12 — As diagonais \vec{AC} e \vec{BD} de um quadrilátero ABCD se interceptam no ponto P, que divide o segmento \vec{AC} na razão $m : n$ e o segmento \vec{BD} na razão $m' : n'$. Dado Q o ponto de intersecção das retas contendo os segmentos \vec{BC} e \vec{AD} . Encontre a razão $AQ : DQ$ e $BQ : CQ$.

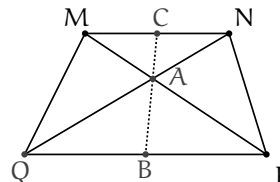


13 — Dado um triângulo ΔOAB , sejam C e D pontos sobre o lado AB dividindo esse segmento em três partes congruentes. Por B traçamos a reta paralela a OA, e sejam X e Y a intersecção dessa reta com as retas ligando OC e OD respectivamente.

- Expresse os vetores \vec{OX} e \vec{OY} em função de \vec{OA} e \vec{OB} .
- Determine as razões nas quais X divide BY, C divide a OX e D divide a OY.



14 — Dado um paralelogramo MNPQ, seja A o ponto de intersecção das diagonais e sejam B e C os pontos médios dos lados opostos MN e PQ. Prove que se os pontos A, B e C estão sobre a mesma reta então MNPQ é um trapézio (um trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos).



15 — Sejam B um ponto no lado ON do

paralelogramo $AMNO$ e C um ponto na diagonal OM tais que

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$$

e $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+n}\overrightarrow{OM}$. Prove que os pontos A , B e C estão na mesma reta.

Respostas dos Exercícios

1

$$\mathbf{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathbf{a} + \sqrt{3}\mathbf{b}$$

2

$$\mathbf{c} = -\frac{3\sqrt{6}}{8}\mathbf{a} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathbf{b}$$

3 (a) Note que $\triangle AFD \approx \triangle EFB$.

(b) Observe que, como \mathbf{a} e \mathbf{b} não são paralelos, eles formam uma base para os vetores no plano. Logo todos os demais vetores do problema podem ser escritos em função desses.

O problema de encontrar \overrightarrow{AF} está ligado a determinar onde fica o ponto F. Sobre esse tudo que sabemos é que é a intersecção dos segmentos BD e AE. Desse modo, para localizar F, precisamos inicialmente de duas equações:

- B, F e D são colineares:

$$\overrightarrow{BF} = \theta \overrightarrow{BD},$$

para algum θ real.

- A, F e E são colineares:

$$\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AE},$$

para algum λ real.

(Note que θ e λ não são necessariamente iguais!)

Escrevamos agora \overrightarrow{AF} e \overrightarrow{BF} em função de \mathbf{a} , \mathbf{b} , θ e λ . É fácil (por quê?) ver que:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$$

Então, relacionando \overrightarrow{AF} e \overrightarrow{BF} temos:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

donde segue:

$$\lambda \left(\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b} \right) = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Colocando tudo à esquerda da igualdade e deixando \mathbf{a} e \mathbf{b} em evidência:

$$\mathbf{a}(\lambda + \theta - 1) + \mathbf{b} \left(\frac{3}{4}\lambda - \theta \right) = \mathbf{0}$$

Como \mathbf{a} e \mathbf{b} são LI segue:

$$\begin{cases} \lambda + \theta - 1 = 0 \\ \frac{3}{4}\lambda - \theta = 0 \end{cases}$$

Finalmente, obtemos $\lambda = \frac{4}{7}$ e

$$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{7}\mathbf{a} + \frac{3}{7}\mathbf{b}.$$

4

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{7}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

5 Considere $\overrightarrow{FC} = \lambda \overrightarrow{AF}$. Queremos determinar λ .

Sejam $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, então temos:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AE}}{2} \text{ e } \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

e logo:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4}$$

Também temos que:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}}{1 + \lambda}$$

Como F, D e B são colineares então:

$$\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AD} + (1 - \alpha) \overrightarrow{AB}$$

e assim

$$\overrightarrow{AF} = \left(1 - \frac{3}{4}\alpha\right) \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\alpha \overrightarrow{AC}$$

E conseqüentemente $1 - \frac{3}{4}\alpha = 0$ e $\frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{1+\lambda}$ e assim $\lambda = 2$.

Logo F divide o segmento \overline{AC} na razão 1 : 2.

6 $\vec{OA} = (1 + \lambda)\vec{OB} - \lambda\vec{OC}$.

8 Resolvido nas notas de aula.

9 Prove que a única combinação linear de $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ e $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ dando o vetor nulo tem os coeficientes todos nulos.

11 Por que esses vetores são necessariamente LI?

12

$$\frac{\|AQ\|}{\|DQ\|} = \frac{(n + m)m'}{(n' + m')n} \quad \frac{\|BQ\|}{\|CQ\|} = \frac{(n' + m')m}{(n + m)n'}$$