Lista 3 - Geometria Analítica

Soma de Ponto e Vetor, e Problemas Clássicos de Geometria

1 — Prove que:

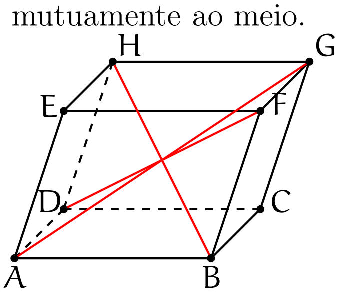
a) $(\mathsf{P}+\mathbf{u})-\mathbf{u}=\mathbf{P}$

b) $\mathsf{P}+\mathbf{u}=\mathsf{Q}+\mathbf{v}$ então $\mathbf{u}=\mathsf{PQ}+\mathbf{v}$

c) $\mathsf{P}+\overrightarrow{\mathsf{PQ}}=\mathsf{Q}$

2 — Prove que as diagonais de um paralelogramo se dividem mutualmente ao meio.

3 — Chama-se diagonal de um paralelepípedo a um segmento ligando dois vértices não pertencentes a uma mesma face. Demostre que as diagonais de um paralelepípedo dividem-se mutuamente ao meio.



4 — Seja $ABCD$ um quadrilátero. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

5 — Seja G o baricentro (ou seja o ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC. Prove que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

6 — Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases.

7 — Prove que existe um único ponto comum as bissetrizes internas de um triângulo e que esse ponto, conhecido como incentro do triângulo é interior a ele.

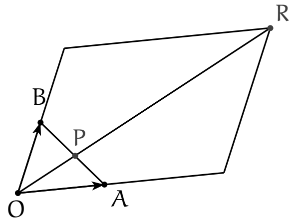
8 — Dado $ABCD$ um tetraedro, seja M o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC. Exprima o vetor $\overrightarrow{DM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$.

9 — Dado $ABCD$ um quadrilátero, e O um ponto qualquer e seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que

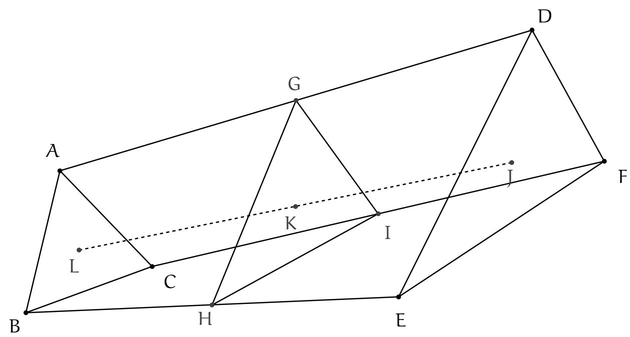
$$P=O+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

Extras

10 — Mostre que dados os vetores $m\overrightarrow{OA}$ e $n\overrightarrow{OB}$, sua soma é igual a $(n+m)\overrightarrow{OP}$, sendo P o ponto de intersecção do segmento AB com a reta OR, onde $R=O+m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$.



11 — Num plano são dados dois triângulos ΔABC e ΔCDE. Sejam G, H, I os pontos médios dos segmentos $\overline{AC}, \overline{BD}$ e $\overline{CE}$ respectivamente. Mostre que os baricentros dos triângulos ΔABC ΔDEF e ΔGHI são colineares.



Respostas dos Exercícios

1 [**Definição:** $\mathsf{P} + \mathbf{u} = \mathsf{Q} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathsf{PQ}} = \mathbf{u}$.]

(a) Escreva $\mathsf{P} + \mathbf{u} = \mathsf{Q}$.

(b) Escreva $\mathsf{R} = \mathsf{P} + \mathbf{u} = \mathsf{Q} + \mathbf{v}$

(c) Trivial.

2 Feito nas notas de aula.

3 Note que ABGH é paralelogramo.

4 Note que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathsf{BC}} &= \overrightarrow{\mathsf{BA}} + \overrightarrow{\mathsf{AD}} + \overrightarrow{\mathsf{DC}} \\ \overrightarrow{\mathsf{EF}} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathsf{BA}} + \overrightarrow{\mathsf{DC}}) + \overrightarrow{\mathsf{AD}} \end{aligned}$$

5 Escreva tudo em função de $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathsf{AC}}$

7 Note que a bissetriz do ângulo entre $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathsf{AC}}$ é dada por:

$$\mathsf{X} = \mathsf{A} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{\mathsf{AB}}}{\|\overrightarrow{\mathsf{AB}}\|} + \frac{\overrightarrow{\mathsf{AC}}}{\|\overrightarrow{\mathsf{AC}}\|} \right),$$

pois as diagonais de um losango são bissetrizes.