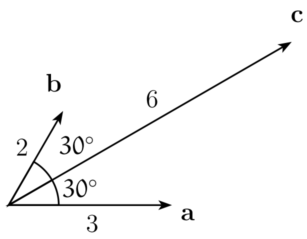
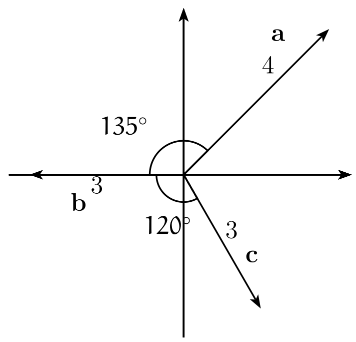
Lista 2 - Geometria Analítica

Dependência e Independência Linear de Vetores

1 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ como na figura abaixo. Escreva o vetor $\mathbf{c}$ como combinação de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.



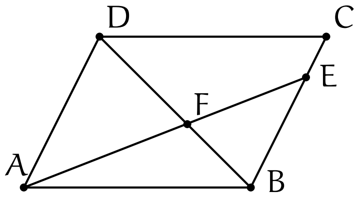
2 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ como na figura abaixo. Escreva o vetor $\mathbf{c}$ como combinação de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.



3 — Considere um paralelogramo $ABCD$. Seja E o ponto sobre o segmento BC tal que a distância de B a E é três vezes a distância de E a C. Seja F a intersecção de AE com a diagonal BD. Se $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ e $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, escreva o vetor $\overrightarrow{AF}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ usando:

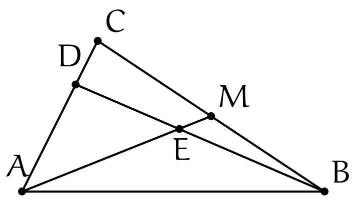
(a) Geometria plana clássica (semelhança de triângulos);

(b) Geometria analítica (combinações lineares de vetores);

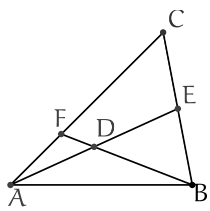


4 — Considere um triângulo ABC. Sejam M o ponto médio de BC e D o ponto sobre o segmento AC tal que a distância de D a A é três vezes a distância de D a C. Seja E a intersecção de AM com BD. Se $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, escreva o vetor $\overrightarrow{AE}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Cuidado! Não há triângulos semelhantes neste caso...



5 — Seja D o ponto médio da mediana AE do triângulo ΔABC. Se a reta BD corta o lado $\overline{AC}$ no ponto F, determine a razão que F divide $\overline{AC}$



6 — Se $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$, prove que os vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são LD para qualquer ponto O.

7 — Os pontos P e Q dividem os lados CA e CB de um triângulo ΔABC de modo que

$$\frac{\|\overrightarrow{CP}\|}{\|\overrightarrow{PA}\|} = \frac{x}{1-x}, \frac{\|\overrightarrow{CQ}\|}{\|\overrightarrow{QB}\|} = \frac{y}{1-y}.$$

Prove que se $\overrightarrow{PQ} = \lambda\overrightarrow{AB}$ então $x = y = \lambda$.

8 — Mostre que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

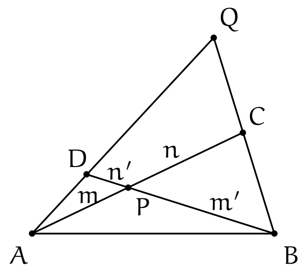
9 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\}$ também é L.I.

10 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w}-2\mathbf{u}\}$ também é L.I.

11 — Dado um tetraedro ABCD explique por que os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ formam uma base para o espaço.

Extras

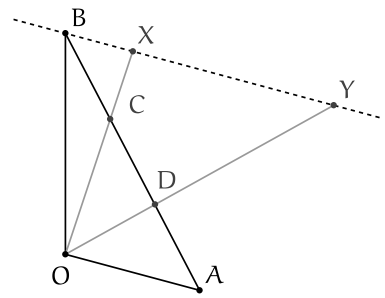
12 — As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de um quadrilátero ABCD se interceptam no ponto P, que divide o segmento $\overline{AC}$ na razão $m : n$ e o segmento $\overline{BD}$ na razão $m' : n'$. Dado Q o ponto de intersecção das retas contendo os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Encontre a razão $AQ : DQ$ e $BQ : CQ$.



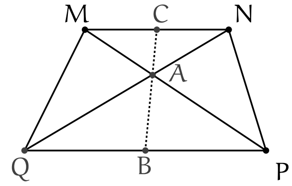
13 — Dado um triângulo ΔOAB, sejam C e D pontos sobre o lado AB dividindo esse segmento em três partes congruentes. Por B traçamos a reta paralela a OA, e sejam X e Y a intersecção dessa reta com as retas ligando OC e OD respectivamente.

a) Expresse os vetores $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ em função de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

b) Determine as razões nas quais X divide BY, C divide a OX e D divide a OY.



14 — Dado um paralelogramo MNPQ, seja A o ponto de intersecção das diagonais e sejam B e C os pontos médios dos lados opostos MN e PQ. Prove que se os pontos A, B e C estão sobre a mesma reta então MNPQ é um trapézio (um trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos).



15 — Sejam B um ponto no lado ON do

paralelogramo $AMNO$ e e C um ponto na diagonal OM tais que

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$$

e $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{1+n}\overrightarrow{OM}$. Prove que os pontos A, B e C estão na mesma reta.

Respostas dos Exercícios

1

$$\mathbf{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathbf{a} + \sqrt{3}\mathbf{b}$$

2

$$\mathbf{c} = -\frac{3\sqrt{6}}{8}\mathbf{a} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathbf{b}$$

3 (a) Note que $\triangle AFD \approx \triangle EFB$.

(b) Observe que, como **a** e **b** não são paralelos, eles formam uma base para os vetores no plano. Logo todos os demais vetores do problema podem ser escritos em função desses.

O problema de encontrar $\overrightarrow{AF}$ está ligado a determinar onde fica o ponto F. Sobre esse tudo que sabemos é que é a intersecção dos segmentos BD e AE. Desse modo, para localizar F, precisamos inicialmente de duas equações:

- B, F e D são colineares:

$$\overrightarrow{BF} = \theta\overrightarrow{BD},$$

para algum θ real.

- A, F e E são colineares:

$$\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AE},$$

para algum λ real.

(Note que θ e λ não são necessariamente iguais!)

Escrevamos agora $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{BF}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, θ e λ. É fácil (por quê?) ver que:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$$

Então, relacionando $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{BF}$ temos:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

donde segue:

$$\lambda\left(\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}\right) = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Colocando tudo à esquerda da igualdade e deixando **a** e **b** em evidência:

$$\mathbf{a}\,(\lambda + \theta - 1) + \mathbf{b}\left(\frac{3}{4}\lambda - \theta\right) = \mathbf{0}$$

Como **a** e **b** são LI segue:

$$\begin{cases} \lambda + \theta - 1 = 0 \\ \frac{3}{4}\lambda - \theta = 0 \end{cases}$$

Finalmente, obtemos $\lambda = \frac{4}{7}$ e

$$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{7}\mathbf{a} + \frac{3}{7}\mathbf{b}.$$

4

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{7}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

5 Como A, F e C são colineares temos $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Queremos determinar λ.

Como B, D e F são colineares temos $\overrightarrow{DF} = \theta\overrightarrow{BD}$.

Sabemos que

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}. \tag{0.1}$$

Considerando $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ \overrightarrow{BD} &= -\tfrac{3}{4}\mathbf{a} + \tfrac{1}{4}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Escrevendo os vetores de (0.1) em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ obtemos:

$$\lambda\mathbf{b} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \theta\left(-\frac{3}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}\right).$$

Usando que $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI e igualando os coeficientes, obtemos $\lambda = 1/3$.

Logo F divide o segmento $\overline{AC}$ na razão $1:2$.

6 $\overrightarrow{OA} = (1+\lambda)\overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OC}$.

8 Resolvido nas notas de aula.

9 Prove que a única combinação linear de $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ e $(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ dando o vetor nulo tem os coeficientes todos nulos.

11 Por que esses vetores são necessariamente LI?

12

$$\frac{\|AQ\|}{\|DQ\|}=\frac{(n+m)m'}{(n'+m')n} \quad \frac{\|BQ\|}{\|CQ\|}=\frac{(n'+m')m}{(n+m)n'}$$

13 (a) Sejam $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ e $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.

Como a reta por B é paralela a OA temos:

$$X=B+\lambda\overrightarrow{OA}=O+\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OA}. \quad (0.2)$$

Logo $X=O+\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}$.

Por outro lado temos que O, C e X são colineares:

$$X=O+\theta\overrightarrow{OC}.$$

Mas temos que:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\frac{2}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a}),$$

donde:

$$X=O+\theta(1/3\mathbf{a}+2/3\mathbf{b}). \quad (0.3)$$

De (0.2) e (0.3) obtemos:

$$\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}=\theta[(1/3)\mathbf{a}+(2/3)\mathbf{b}].$$

Como $\mathbf{a},\mathbf{b}$ são LI segue:

$$\begin{cases}\lambda &= (1/3)\theta\\ 1 &= (2/3)\theta\end{cases}$$

O que nos leva a $\overrightarrow{OX}=(1/2)\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Analogamente, fazendo $Y=B+\alpha\overrightarrow{OA}$, obtemos:

$$Y=O+\alpha\mathbf{a}+\mathbf{b}. \quad (0.4)$$

De $Y=O+\beta\overrightarrow{OD}$ segue:

$$Y=O+\beta[(2/3)\mathbf{a}+(1/3)\mathbf{b}]. \quad (0.5)$$

Finalmente, de (0.4) e (0.5), segue $\overrightarrow{OY}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

(b) Como $\overrightarrow{BX}=(1/4)\overrightarrow{BY}$, X divide BY na proporção $1:3$.

Como $\overrightarrow{OC}=(2/3)\overrightarrow{OX}$, C divide OX na proporção $2:1$.

Como $\overrightarrow{OD}=(1/3)\overrightarrow{OY}$, D divide OY na proporção $1:2$.