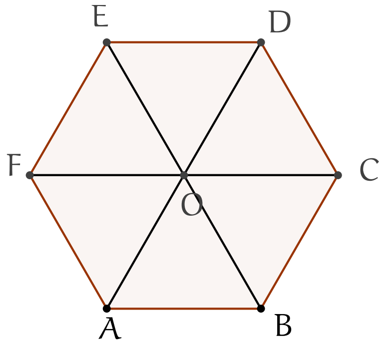
Lista 4 - Geometria Analítica

Vetores em Coordenadas

1 — Dado o hexágono regular $ABCDEF$ de centro O, conforme a figura abaixo:



Determine as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D, E e F nos seguintes sistemas de coordenadas:

a) $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$

b) $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$

c) $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$

d) $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$

2 — Encontre as coordenadas dos seguintes vetores nos sistemas de coordenadas do exercício anterior:

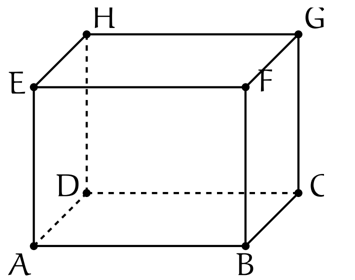
a) $\overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{BE}$

3 — Dado o paralelepípedo retângulo $ABCDEFGH$ abaixo. Sejam $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AF}$, $\mathbf{e}_4 = \overrightarrow{AE}$.



Verifique se os objetos descritos nos itens abaixo formam um sistema vetorial de coordenadas. Em caso afirmativo, determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H nesse sistema.

a) $(A; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

b) $(A; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

c) $(A; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

d) $(H; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

e) $(G; -\mathbf{e}_4; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; 3\mathbf{e}_3)$

f) $(A; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; \frac{1}{2}\mathbf{e}_2; \frac{1}{2}\mathbf{e}_3)$

4 — Sob as mesmas hipóteses do exercício anterior, determine as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{EH}$ nos seguintes sistemas de coordenadas:

a) $(A; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

b) $(A; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

c) $(H; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

d) $(H; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

e) $(G; -\mathbf{e}_4; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; 3\mathbf{e}_3)$

5 — Os pontos médios dos lados de um triângulo são $(2, 5)$, $(4, 2)$ e $(1, 1)$. Determine as coordenadas dos três vértices.

6 — Dados dois pontos $P : (x_1, y_1, z_1)$ e $Q :$

(x_2, y_2, z_2), encontre a coordenada do ponto R, que se encontra sobre o segmento ligando os pontos P e Q e tal $d(R, Q) = \lambda d(R, P)$.

7 — Prove utilizando coordenada que o segmento de reta que une os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

8 — Determine quais dos conjuntos abaixo são L.I.

a) $\{(1, -1, 2), (1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$
b) $\{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 2, 2)\}$
c) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 0, 5)\}$

9 — Exprima o vetor $\mathbf{w} : (1, 1)$ como combinação linear de $\mathbf{u} : (2, -1)$ e $\mathbf{v} : (1, -1)$.

10 — Sejam $\mathbf{u} = (2, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 3)$. Mostre que todo vetor (c_1, c_2) pode ser expresso como combinação linear de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

11 — Sejam $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$ vetores no espaço.

a) encontre as componentes de um vetor $\mathbf{z} = (a, b, c)$ na base formada por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.
b) Mostre que se $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ então as componentes de $\mathbf{z}$ na base formada por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são todas iguais a zero.
c) encontre as componentes de um vetor $\mathbf{z} = (1, 2, 3)$ na base formada por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, e $\mathbf{w}$.

12 — Mostre que dois vetores não nulos $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ são LD se e somente se existe λ tal que:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3)$$

Utilize esse critério para decidir se os vetores abaixo são LI ou LD:

a) $\mathbf{u} = (1, 2, 3) \qquad \mathbf{v} = (4, 5, 6)$
b) $\mathbf{u} = (1, 0, 3) \qquad \mathbf{v} = (-2, 0, -6)$
c) $\mathbf{u} = (1, 2, 5) \qquad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}\right)$

13 — Determine m, n de modo que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sejam LD, onde:

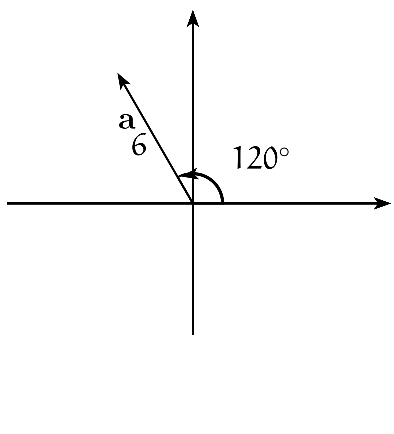
a) $\mathbf{v} = (1, m, n + 1)\mathbf{w} = (m, n, 2)$
b) $\mathbf{v} = (1, m - 1, m)\mathbf{w} = (m, n, 4)$

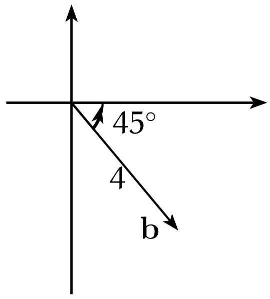
14 — Dado $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base. Determine condições necessárias e suficientes sobre a, b de modo que os vetores $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sejam LI, com $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ dados por:

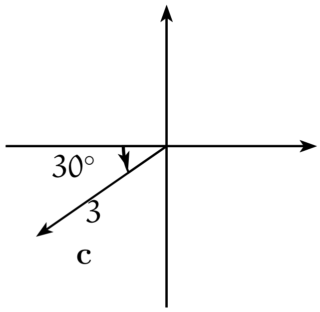
a) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, w = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$
b) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, w = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + (b^2 + 2a)\mathbf{e}_3$

Nos próximos exercícios, as coordenadas são expressas num sistema cartesiano.

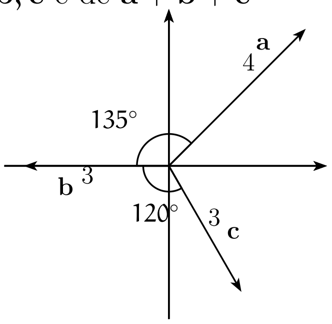
15 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ conforme a figura abaixo. Determine as componentes dos vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e de $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$







16 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ conforme a figura abaixo. Determine as componentes dos vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e de $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$



17 — Dados $A : (4, 8, 11)$, $B : (-3, 1, 4)$ e $C : (2, 3, -3)$ desenhe o triângulo ABC e ache:

a) O comprimento dos três lados do triângulo;

b) Os pontos médios dos três lados do triângulo;

c) Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$;

d) A soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. Porque essa soma deve ser zero?;

e) Os ângulos entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Dica: use a lei dos cossenos;

f) A área do triângulo;

g) O ponto D tal que $ABCD$ é um paralelogramo (Três respostas)

18 — O triângulo ABC, com $A = (-a; 0)$ $B = (a; 0)$ $C = (0; y)$ é equilátero. Quais são os possíveis valores de y?

19 — Três vértices de um retângulo são $(2, -1)$, $(7, -1)$ e $(7; 3)$: Determinar o quarto vértice e a área.

Respostas dos Exercícios

1 a.) Começando pelos mais simples, temos

$$O = (0, 0)$$

(origem do sistema de coordenadas) e

$$C = O + \overrightarrow{OC} = O + \overrightarrow{OC} + 0\overrightarrow{OD},$$

e portanto

$$C = (1, 0).$$

Do mesmo modo encontramos

$$D = (0, 1).$$

Note agora que

$$B = O + \overrightarrow{OB} = O + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = O + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD},$$

de onde segue que

$$B = (1, -1).$$

Observando que $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OB}$ concluímos que

$$A = (0, -1), F = (-1, 0) \text{ e } E = (-1, 1).$$

b.) $O = (0, 0)$, $A = (-1, -1)$, $B = (0, -1)$, $C = (1, 0)$, $D = (1, 1)$, $E = (0, 1)$ e $F = (-1, 0)$.
c.) $O = (0, 1)$, $A = (-1, -1)$, $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $D = (1, 1)$, $E = (0, 2)$ e $F = (-1, 2)$.
d.) $O = (0, 1/2)$, $A = (-1, 1/2)$, $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $D = (1, 1/2)$, $E = (0, 1)$ e $F = (-1, 1)$.

2 *Dica:* Lembrar da notação de Grassmann: $\overrightarrow{AB} = B - A$.

3 a.) $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (-1, 1, 0)$, $E = (-1, 0, 1)$, $F = (0, 0, 1)$, $G = (-1, 1, 1)$ e $H = (-2, 1, 1)$.
b.) $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 0, 0)$, $D = (1, -1, 0)$, $E = (0, -1, 1)$, $F = (0, 0, 1)$, $G = (1, -1, 1)$ e $H = (1, -2, 1)$.
c.) Não é sistema de coordenadas, pois os vetores são linearmente dependentes.
d.) *Dica:* Observe as respostas do item (a) e que para todo ponto P temos $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AP}$.
e.) Não é sistema de coordenadas, pois os vetores são linearmente dependentes.

5 $(5, 6)$, $(-1, 4)$ e $(3, -2)$.

6

$$R = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)(x_1, y_1, z_1) + \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)(x_2, y_2, z_2)$$

8 a.) L.I. **b.)** L.I. **c.)** L.D.

9 $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

10

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

11 a.) $\mathbf{z} = (a - b + c)\mathbf{u} + (-a + b)\mathbf{v} + (b - c)\mathbf{w}$.
c.) $(2, -3, -5)$.

12 a.) L.I. **b.)** L.D. **c.)** L.I.

13 a.) $m = 1$ e $n = 1$. **b.)** ($m = 2$ e $n = 2$) ou ($m = -2$ e $n = 6$).

14 a.) $a + b \neq 2$. **b.)** $b \neq 0$ e $b \neq 1$.

15 $\mathbf{a} = (-3, 3\sqrt{3})$, $\mathbf{b} = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $\mathbf{c} = (-3\sqrt{3}/2, -3/2)$.

16 $\mathbf{a} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $\mathbf{b} = (-3, 0)$, $\mathbf{c} = (3/2, -3\sqrt{3}/2)$.

18 $y = \pm a\sqrt{3}$.

19 $(2, 3)$, área 20.