APLICAÇÕES - EDO's DE 1ª ORDEM

1. Dinâmica Populacional (Modelo Malthusiano)

O modelo mais simples de **crescimento populacional** é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população $\frac{dy}{dt}$ é proporcional a população presente naquele instante $y(t)$.

1. Dinâmica Populacional (Modelo Malthusiano)

O modelo mais simples de **crescimento populacional** é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população $\frac{dy}{dt}$ é proporcional a população presente naquele instante $y(t)$.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_o \end{cases}$$

onde k é uma constante positiva.

Essa equação é separável e pode ser resolvida obtendo a solução:

$$y(t) = y_o e^{kt}.$$

Essa equação é separável e pode ser resolvida obtendo a solução:

$$y(t) = y_o e^{kt}.$$

Exemplo: Em uma cultura, há inicialmente N_o bactérias. Uma hora depois, $t = 1$, o número de bactérias passa a ser $(3/2)N_o$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique.

2. Crescimento Logístico (Verhurst)

Para levar em conta que a população $y(t)$ tem um **valor máximo sustentável** y_M podemos supor que a taxa de crescimento além de ser proporcional a população atual, é proporcional também à diferença entre y_M e a população presente.

2. Crescimento Logístico (Verhurst)

Para levar em conta que a população $y(t)$ tem um **valor máximo sustentável** y_M podemos supor que a taxa de crescimento além de ser proporcional a população atual, é proporcional também à diferença entre y_M e a população presente. Nesse caso a população como função do tempo, y(t), é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(y_M - y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

que é uma equação separável cuja solução é dada por:

$$y(t) = \frac{y_o y_M}{y_o + (y_M - y_o)e^{-y_M k(t-t_o)}}.$$

que é uma equação separável cuja solução é dada por:

$$y(t) = \frac{y_o y_M}{y_o + (y_M - y_o)e^{-y_M k(t-t_o)}}.$$

Observe que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = y_M \quad \text{se} \quad y_o \neq 0$$

Exemplo: Suponha que um estudante infectado com um vírus da gripe retorne a uma faculdade isolada no campus onde se encontram 1.000 estudantes. Presumindo que a taxa na qual o vírus se espalha é proporcional não somente à quantidade y de alunos infectados, mas também à quantidade de alunos não infectados, determine o número de alunos infectados após 6 dias se ainda é observado que depois de 4 dias $y(4) = 50$.

3. Datação por Carbono 14

3. Datação por Carbono 14

A proporção de carbono 14 (radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante. Quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando em carbono 12 a uma taxa que é proporcional a quantidade presente. Podemos descrever o problema de encontrar a quantidade de carbono 14 em função do tempo, $y(t)$, como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -ky \\ y(0) = y_o \end{cases}.$$

A equação é a mesma do crescimento exponencial (trocando-se k por $-k$) e vimos que este problema tem solução

$$y(t) = y_o e^{-kt},$$

em que y_o é a quantidade no instante $t = 0$.

Exemplo: Em um pedaço de madeira é encontrado $1/500$ da quantidade original de carbono 14. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5.600 anos, ou seja, que em 5.600 anos metade do carbono 14 presente transformou-se em carbono 12. Determine a idade deste pedaço de madeira.

4. Lei de Resfriamento de Newton

4. Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo $T(t)$ e a temperatura constante do meio ambiente T_m, ou seja, a temperatura do corpo, $T(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \\ T(0) = T_o \end{cases} .$$

4. Exemplo: A polícia encontra o corpo de uma pessoa vítima de assassinato às 14:00 hs. O legista verifica que o corpo está à uma temperatura de 26^oC. Considerando que a temperatura do ambiente manteve-se razoavelmente constante em 25^oC durante as últimas horas, que a temperatura da pessoa quando foi morta era de $36,5^oC$ e sabendo que o coeficiente de resfriamento do corpo é de 1,3 pergunta-se: a que horas a pessoa foi assassinada?

5. Problema de Misturas

5. Problema de Misturas

- Suponha que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial V_o litros e Q_o gramas de sal e que uma solução salina seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de T_e litros por minuto possuindo uma concentração de C_e gramas de sal por litro. Suponha ainda que a solução bem misturada sai a uma taxa de T_s litros por minuto.

- A taxa de variação da quantidade de sal no tanque é igual a taxa com que entra sal no tanque menos a taxa com que sai sal do tanque.

- A taxa de variação da quantidade de sal no tanque é igual a taxa com que entra sal no tanque menos a taxa com que sai sal do tanque.

- A taxa com que entra sal no tanque é igual a taxa com que entra a mistura, T_e, vezes a concentração de entrada, C_e. E a taxa com que sai sal do tanque é igual a taxa com que sai a mistura do tanque, T_s, vezes a concentração de sal que sai do tanque, C_s.

- Como a solução é bem misturada esta concentração é igual a concentração de sal no tanque, ou seja,

$$Cs(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

- Como a solução é bem misturada esta concentração é igual a concentração de sal no tanque, ou seja,

$$Cs(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

- Como o volume no tanque, $V(t)$, é igual ao volume inicial, V_o, somado ao volume que entra no tanque menos o volume que sai do tanque, então

$$V(t) = V_o + T_e t - T_s t = V_o + (T_e - T_s)t.$$

- Assim, a quantidade de sal no tanque, $Q(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = T_e C_e - T_s \dfrac{Q}{V_o + (T_e - T_s)t} \\ Q(0) = Q_o \end{cases} .$$

Exemplo: Num tanque há 100 litros de salmoura contendo 30 gramas de sal em solução. Água (sem sal) entra no tanque à razão de 6 litros por minuto e a mistura se escoa à razão de 4 litros por minuto, conservando-se a concentração uniforme por agitação. Determinar qual a concentração no tanque ao fim de 50 minutos.

6. Crescimento de Peixes (Modelo de von Bertalanffy)

$p(t)$ - peso de uma espécie de peixe

O **modelo de von Bertalanffy** estabelece que "o crescimento do peso do peixe é proporcional à área de sua superfície externa (anabolismo) e o decaimento é proporcional à energia consumida (catabolismo)"

Em outras palavras temos:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha A - \beta p$$

onde

- α é a constante de anabolismo;
- β á a constante de catabolismo;

Lembrando que:

- o peso é proporcional ao volume;
- o volume é proporcional ao cubo do comprimento (daí temos: $p = k_1 l^3$);
- a área é proporcional ao quadrado do comprimento (daí temos: $A = k_2 l^2$).

Portanto, $A = kp^{2/3}$.

Logo, o modelo se escreve como:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p$$

que é uma equação de Bernoulli.

Considerando a condição inicial $p(0) = p_o$ o p.v.i. tem solução na forma:

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \left(p_o^{1/3} - \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{-\beta t}\right)^{1/3}$$