Introdução às Equações Diferenciais e Ordinárias - 2017.2

Lista 0 - Revisão de derivadas e integrais

1 — Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $y = \text{sen}(\cos(x))$

b) $y = e^{\text{tg}(x)}$

c) $y = \dfrac{e^x}{\text{sen}(3x) + 2^x \cos(x)}$

d) $y = 3^{x^3}$

e) $y = x^x$

2 — Sejam $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = e^x$. Calcule:

a) $\dfrac{d}{dx}[f(g(x))]$

b) $\dfrac{d}{dx}[g(f(x))]$

c) $\dfrac{d}{dx}[h(f(x))]$

d) $\dfrac{d}{dx}[f(h(x))]$

e) $\dfrac{d}{dx}[h(f(g(x)))]$

3 — Encontre $y'(x)$ sabendo que $y = y(x)$ e $y^x = x^y$.

4 — Encontre $y'(x)$ sabendo que $y = y(x)$ e $\cos(y + x) = xe^y$.

5 — Enuncie o Teorema Fundamental do Cálculo. (Procure no seu livro preferido de cálculo.) Diga por que esse teorema merece esse nome.

6 — Qual é a diferença entre uma integral definida e uma integral indefinida? Dê exemplos.

7 — Calcule as seguintes integrais por substituição:

a) $\displaystyle\int \text{sen}(3x)dx$

b) $\displaystyle\int x(4+x^2)^{10}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\text{sen}(\theta)}\cos(\theta)\, d\theta$

8 — Calcule as seguintes integrais usando integração por partes:

a) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

b) $\displaystyle\int x\,\text{sen}(3x)dx$

c) $\displaystyle\int e^x\cos(x)dx$

9 — Calcule as seguintes integrais usando frações parciais:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-16}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx$

c) $\displaystyle\int_3^4 \frac{7x+3}{(x-2)^2}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2-2x+1}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-9}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x}dx$

10 — Calcule as integrais abaixo usando substituição trigonométrica. Esboce o triângulo retângulo associado.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{5}} x^3\sqrt{4-25x^2}dx$

c) $\int x\sqrt{1-4x^4}dx$

d) $\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{7}{2}}}$

11 — Calcule as integrais abaixo:

a) $\int \operatorname{sen}^2(x)dx$

b) $\int \sec(x)dx$

c) $\int \cos(\ln x)dx$

d) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

e) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

f) $\int_0^2 x^2\sqrt{x^2+4}dx$

g) $\int \sqrt{2x-x^2}dx$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

i) $\int_0^1 e^t\sqrt{9-e^{2t}}\,dt$

j) $\int \frac{x^2}{x+1}dx$

k) $\int \frac{x-9}{x^2+3x-10}dx$

l) $\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

m) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}dx$

n) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx$

o) $\int_0^1 \frac{x^3}{2x+1}dx$

p) $\int \sec^2(2x)\operatorname{tg}(2x)dx$

12 — Uma partícula se desloca sobre o eixo x de acordo com uma função posição $x = x(t)$. Sendo $v(t) = x'(t)$ a função velocidade da partícula e $a(t) = x''(t)$ a função aceleração da partícula, determine $x = x(t)$ nos casos abaixo:

a) $v(t) = 7t^2 - t$ e $x(0) = 6$

b) $v(t) = \frac{1}{1-t^2}$ e $x(0) = 0$

c) $a(t) = 3t$, $v(0) = 1$ e $x(0) = 8$

d) $a(t) = -e^{2t}$, $v(0) = 1$ e $x(0) = 1$

e) $a(t) = \cos\left(\frac{t}{4}\right)$, $v(0) = 1/2$ e $x(0) = 0$

Dicas e sugestões

1d: faça $3^{x^3} = e^{\ln 3^{x^3}} = e^{x^3 \ln 3}$ ou então aplique ln na equação, i.e. $\ln y = x^3 \ln 3$ e use derivação implícita.
1e: faça como em 1d.
3: faça como em 1d. Preste atenção que $y = y(x)$ e não esqueça da regra da cadeia.
10c: faça $\cos\theta = 2x^2$.
10d: complete quadrados para escrever $5 - 4x - x^2 = 9 - (x+2)^2$. Faça então $x + 2 = 3\cos\theta$. Por último faça $\sec^6\theta = \sec^4\theta \sec^2\theta = (1 + \operatorname{tg}^2\theta)^2 \sec^2\theta$, juntamente com a mudança de variável $y = \operatorname{tg}\theta$.
11a: use $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.
11b: multiplique e divida por $\sec x + \operatorname{tg} x$. Então faça a substituição $u = \sec x + \operatorname{tg} x$.
11g: complete quadrados para escrever $1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$ e então faça $1 - x = \operatorname{sen}\theta$.
11i: faça a substituição $e^t = 3\operatorname{sen}\theta$.

Respostas dos Exercícios

1 a) $y' = -\operatorname{sen}(x)\cos(\cos(x))$

b) $y' = e^{\operatorname{tg}(x)}\sec^2(x)$

c) $y' = \frac{e^x}{\operatorname{sen}(3x)+2^x\cos(x)} - \frac{e^x(-2^x\operatorname{sen}(x)+3\cos(3x)+2^x\ln(2)\cos(x))}{(\operatorname{sen}(3x)+2^x\cos(x))^2}$

d) $y' = 3^{x^3+1}x^2\ln(3)$

e) $y' = x^x(\ln(x)+1)$

2 a) $-2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = -\operatorname{sen}(2x)$

b) $-2x\operatorname{sen}\left(x^2\right)$

c) $2xe^{x^2}$

d) $2e^{2x}$

e) $-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)e^{\cos^2(x)} = -\operatorname{sen}(2x)e^{\cos^2(x)}$

3 $y'(x) = \frac{y(x^y y - xy^x\ln(y))}{x(xy^x - x^y y\ln(x))} = \frac{\frac{y}{x}-\ln(y)}{\frac{x}{y}-\ln(x)}$

4 $y'(x) = \frac{-e^y-\operatorname{sen}(y+x)}{xe^y+\operatorname{sen}(y+x)}$

7 a) $-\frac{1}{3}\cos(3x) + C$

b) $\frac{1}{22}\left(x^2+4\right)^{11} + C$

c) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right) + C$

d) $e^{\operatorname{sen}(\theta)}\Big|_0^{\pi/2} = e - 1$

8 a) $\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C$

b) $\frac{1}{9}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3}x\cos(3x) + C$

c) $\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen}(x)+\cos(x)) + C$

9 a) $\frac{1}{8}(\ln(4-x) - \ln(x+4)) + C = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) + C$

b) $3\ln(3-x) - 2\ln(2-x) + C = \ln\left(\frac{(3-x)^3}{(2-x)^2}\right) + C$

c) $\left(7\ln(x-2) - \frac{17}{x-2}\right)\Big|_3^4 = 17/2 + 7\ln 2$

d) $\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{x-1} + 4\ln(x-1) + C$

e) $x + \frac{11}{6}\ln(3-x) - \frac{11}{6}\ln(x+3) + C$
$= x + \frac{11}{6}\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) + C$

f) $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln(1-x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$

10 a) $\frac{1}{3}\left(x^2-18\right)\sqrt{x^2+9} + C$

b) $-\frac{\left(4-25x^2\right)^{3/2}\left(75x^2+8\right)}{9375}\Bigg|_0^{2/5} = \frac{64}{9375}$

c) $\frac{1}{8}\arccos\left(2x^2\right) - \frac{x^2}{4}\sqrt{1-4x^4} + C$

d) $\frac{(x+2)\left(8x^4+64x^3+12x^2-464x+623\right)}{10935\left(-x^2-4x+5\right)^{5/2}} + C$

11 a) $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C$

b) $\ln(\operatorname{tg}(x) + \sec(x)) + C$

c) $\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(\ln x) + \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + C$

d) $\frac{\ln^2(x)}{2} + C$

e) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}(x) + C$

f) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}x - 2\ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}+1} + \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{x^2+4}x^3 + C$

g) $-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{2x-x^2} + C$

h) $\sqrt{x^2-9} + C$

i) $\left[\frac{1}{2}e^t\sqrt{9-e^{2t}} + \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{e^t}{3}\right)\right]\Big|_0^1$
$= \frac{1}{2}\left(-2\sqrt{2} + e\sqrt{9-e^2} - 9\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) + 9\operatorname{arcsen}\left(\frac{e}{3}\right)\right)$

j) $\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C$

k) $2\ln(x+5) - \ln(2-x) + C = \ln\left(\frac{(x+5)^2}{2-x}\right) + C$

l) $\frac{1}{5}(\ln(t-1) - \ln(t+4)) + C = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{t-1}{t+4}\right) + C$

m) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C = \frac{1}{x} + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$

n) $\frac{1}{a-b}\ln\left(\frac{x+b}{x+a}\right)+C$

o) $\frac{1}{96}\left(16x^3-12x^2+12x-6\ln(2x+1)\right)+C$

p) $\frac{1}{4}\sec^2(2x)+C$

12 a) $x(t)=\frac{7t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+6$

b) $x(t)=\frac{1}{2}(\ln(t+1)-\ln(1-t))=\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$

c) $x(t)=\frac{t^3}{2}+t+8$

d) $x(t)=\frac{1}{4}\left(6t-e^{2t}+5\right)$

e) $x(t)=\frac{t}{2}+16-16\cos\left(\frac{t}{4}\right)$