Introdução às Equações Diferenciais e Ordinárias - 2017.2

Lista 1 - Classificação de EDOs e EDOs de 1ª de primeira ordem

1 — Nos problemas seguintes, determine a ordem da equação diferencial e decida se a equação é linear ou não-linear.

a) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$,

b) $(1+y^2)y'' + ty' + y = e^t$,

c) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + \dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 1$,

d) $\dfrac{dy}{dt} + ty^2 = 0$,

e) $y'' + \operatorname{sen}(t+y) = \operatorname{sen} t$,

f) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + t\dfrac{dy}{dt} + (\cos^2 t)y = t^3$.

2 — Verifique que cada função dada, $y_1(t)$ e/ou $y_2(t)$, é uma solução da equação diferencial associada.

a) $y'' - y = 0$;
$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = \cosh t$.

b) $y'' + 2y' - 3y = 0$;
$y_1(t) = e^{-3t}, \quad y_2(t) = e^t$.

c) $ty' - y = t^2$;
$y_1(t) = 3t + t^2$.

d) $y'''' + 4y''' + 3y = t$;
$y_1(t) = t/3, \quad y_2(t) = e^{-t} + t/3$.

e) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0$;
$y_1(t) = t^{1/2}, \quad y_2(t) = t^{-1}$.

f) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0, \quad t > 0$;
$y_1(t) = t^{-2}, \quad y_2(t) = t^{-2}\ln t$.

g) $y'' + y = \sec t, \quad 0 < t < \pi/2$;
$y_1(t) = \cos t \ln(\cos t) + t \operatorname{sen} t$.

h) $y' - 2ty = 1$,
$y_1(t) = e^{t^2}\displaystyle\int_0^t e^{-s^2}ds + e^{t^2}$.

3 — Determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y(t) = e^{rt}$.

(a) $y' + 2y = 0$, (b) $y'' - y = 0$,

(c) $y'' + y' - 6y = 0$, (d) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

4 — Classifique as EDOs abaixo em lineares/não-lineares, homogêneas/não-homogêneas, separáveis/não-separáveis, e autônomas/não-autônomas. (Obs: homogênea, nesse exercício, significa que $y'(x)$ é função apenas da razão y/x).

a) $y' = xy$,

b) $y' = \dfrac{xy^2}{x^2y + y^3}$,

c) $y' = y^3 \operatorname{sen}(y)$,

d) $y' = \dfrac{y-x}{2x}$,

e) $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$,

f) $t^5y' + \operatorname{arctg}(t)y = \dfrac{1}{1+t^6}$,

g) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{3xy}$,

h) $y' = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + y^4}{x^3y}$,

i) $y\,dx + x\,dy = 0$,

j) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$.

5 — Resolva:

a) $x\,dx + y\,dy = 0$,

b) $\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy = 0$,

c) $\operatorname{sen}(x)dx + ydy = 0,\ y(0) = -2$,

d) $\frac{1}{x}dy - dx = 0$,

e) $(x^2+1)dx + (y^2+y)dy = 0$,

f) $xe^{x^2}dx + (y^5-1)dy = 0,\ y(0) = 0$,

g) $y' = \frac{y-x}{x}$,

h) $y' = \frac{2xy}{y^2-x^2}$,

i) $x^3y\,dy - (x^4+3x^2y^2+y^4)dx = 0$,

j) $2xy\,dy + (x^2+y^2)dx = 0$.

6 — Encontre a solução geral das equações diferenciais abaixo:

a) $y' + 3y = t + e^{-2t}$,

b) $y' - 2y = t^2e^{2t}$,

c) $y' + \frac{1}{t}y = 3\cos 2t,\ t > 0$,

d) $y' + y = te^{-t} + 1$,

e) $y' - 2y = 3e^t$,

f) $ty' + 2y = \operatorname{sen} t,\ t > 0$,

g) $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$,

h) $2y' + y = 3t$,

i) $ty' - y = t^2e^{-t},\ t > 0$,

j) $y' + y = 5\operatorname{sen} 2t$,

k) $2y' + y = 3t^2$.

7 — Encontre a solução dos problemas de valor inicial dados:

a) $y' - y = 2te^{2t},\ y(0) = 1$,

b) $ty' + 2y = t^2 - t + 1,\ y(1) = \frac{1}{2},\ t > 0$,

c) $y' + 2y = te^{-2t},\ y(1) = 0$,

d) $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2},\ y(\pi) = 0,\ t > 0$,

e) $y' - 2y = e^{2t},\ y(0) = 2$,

f) $ty' + 2y = \operatorname{sen} t,\ y(\pi/2) = 1,\ t > 0$,

g) $t^3y' + 4t^2y = e^{-t},\ y(-1) = 0,\ t < 0$.

8 — Encontre a solução geral das equações diferenciais abaixo e as utilize para determinar o comportamento das soluções quando $t \to \infty$:

a) $ty' + 2y = \operatorname{sen} t,\quad t > 0$,

b) $2y' + y = 3t$.

9 — Encontre o valor de y_0 para o qual a solução $y(t)$ do problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3\operatorname{sen} t,\quad y(0) = y_0$$

permanece finita quando $t \to \infty$.

10 — Mostre que, se a e λ são constantes positivas e b é um número real qualquer, então toda solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

satisfaz $y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

11 — Equação de Bernoulli: Algumas vezes é possível resolver uma equação não-linear fazendo-se uma mudança na variável dependente de forma a transformar a equação em uma equação linear. Um exemplo importante da aplicação dessa técnica se observa em equações da forma

$$y' + p(t)y = g(t)y^n$$

Este tipo de equação é chamada equação de Bernoulli. Os problemas que seguem dão as diretrizes para resolver uma equação de Bernoulli qualquer.

a) Resolva a equação de Bernoulli quando $n = 0$ e quando $n = 1$. Observe que em ambos os casos a equação se torna linear.

b) Suponha agora $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Mostre que a mudança de variável $u = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear.

c) Encontre a solução geral $u(t)$ da equação linear resultante do item (b).

d) Usando a solução do item (c), faça a mudança de variável $y = u^{\frac{1}{n-1}}$ e explicite a solução da equação de Bernoulli.

e) Utilize o método de substituição descrito acima para encontrar a solução geral de

$$t^2y' + 2ty - y^3 = 0,\quad t > 0.$$

f) Resolva a equação $y' = ry - ky^2$ onde $r, k > 0$.

12 — Equação de Ricatti: A equação

$$y' + p(t)y + q(t)y^2 = f(t),$$

onde $p(t)$, $q(t)$ e $f(t)$ são funções contínuas em algum intervalo I da reta real e $q(t) \neq 0$ em I, é conhecida como equação de Ricatti. Seja $y_1(t)$ uma solução particular dessa equação. Considere então a mudança de variável $y(t) = y_1(t) + \frac{1}{z(t)}$.

a) Mostre que essa mudança de variável transforma a equação de Ricatti em uma equação de primeira ordem e linear para $z(t)$.

b) Deduza de (a) que a solução geral de uma equação de Ricatti pode ser encontrada, desde que se conheça uma solução particular. Explicite tal solução em termos da solução particular.

c) Use os itens anteriores para determinar a solução geral de cada uma das equações de Ricatti abaixo (observe que uma solução particular $y_1(t)$ é dada em cada caso):
(c.1) $y' - t^3 y + t^2 y^2 = 1, \quad y_1(t) = t,$
(c.2) $y' - ty^2 + (2t-1)y = t-1, \quad y_1(t) = 1,$
(c.3) $y' + y^2 - (1+2e^t)y + e^{2t} = 0, \quad y_1(t) = e^t.$

Dicas e sugestões

2h: use o teorema fundamental do Cálculo.
5: as equações g, h, i, e j são homogêneas; todas as outras são separáveis. Além disso, b, d, e g são equações lineares de primeira ordem e, portanto, podem ser resolvidas pelo método do fator integrante.
6: todas as equações são de primeira ordem, lineares e não homogêneas (no sentido de terem o termo independente não-nulo). Logo, podem ser resolvidas através do fator integrante. Lembre-se também que a solução geral pode ser escrita como a soma entre a solução geral da parte homogênea da equação e uma solução particular qualquer da equação não-homogênea.
7: veja as dicas do item 6 para encontrar a solução geral e, então, use a condição inicial dada para encontrar a solução pedida.
8 Encontre a solução geral usando as dicas do item 6, e então calcule $\lim_{t\to\infty} y(t)$.
9 Calcule a solução em termos de y_0. Calcule então o limite $\lim_{t\to\infty} y(t)$ e exija que ele seja finito para encontrar y_0.
10 Calcule a solução geral $y(t)$ e mostre que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Respostas dos Exercícios

1 a) Segunda ordem, linear.

b) Segunda ordem, não-linear.

c) Quarta ordem, linear.

d) Primeira ordem, não-linear.

e) Segunda ordem, não-linear.

f) Terceira ordem, linear.

3 a) $r = -2$,

b) $r = \pm 1$,

c) $r = 2$ e $r = -3$,

d) $r = 0$, $r = 1$, e $r = 2$.

4 a) Linear, não-homogênea, separável, não-autônoma;

b) Não-linear, homogênea, não-separável, não-autônoma;

c) Não-linear, não-homogênea, separável, autônoma;

d) Linear, homogênea, não-separável, não-autônoma;

e) Não-linear, homogênea, separável, não-autônoma;

f) Linear, não-homogênea, não-separável, não-autônoma;

g) Não-linear, homogênea, não-separável, não-autônoma;

h) Não-linear, homogênea, não-separável, não-autônoma;

i) Linear, homogênea, separável, não-autônoma;

j) Não-linear, homogênea, não-separável, não-autônoma;

5 a) $y(x) = \sqrt{-x^2+2C}, \quad y(x) = -\sqrt{-x^2+2C}$

b) $y(x) = Cx$;

c) $y(x) = -\sqrt{2+2\cos x}$;

d) $y(x) = x^2/2 + C$;

e) $y(x)$ definida implicitamente por $\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = -\frac{x^3}{3} - x + C$;

f) $y(x)$ definida implicitamente por $\frac{y^6}{6} - y = \frac{1-e^{x^2}}{2}$;

g) $y(x) = x(C - \ln x)$;

h) $y(x)$ definida implicitamente por $\ln\left(-\frac{y^2}{x^2}+3\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = -3\ln x + 3C$;

i) $y(x) = -x\sqrt{-\frac{2C+2\ln x+1}{2C+2\ln x}}, \quad y(x) = x\sqrt{-\frac{2C+2\ln x+1}{2C+2\ln x}}$;

j) $y(x) = -\sqrt{\frac{C}{x} - \frac{x^2}{3}}, \quad y(x) = \sqrt{\frac{C}{x} - \frac{x^2}{3}}$;

6 a) $y(t) = e^{-2t} + \frac{t}{3} + Ce^{-3t} - \frac{1}{9}$

b) $y(t) = (\frac{t^3}{3} + C)e^{2t}$

c) $y(t) = \frac{3\,\text{sen}\,2t}{2} + \frac{3\cos 2t}{4t} + \frac{C}{t}$

d) $y(t) = e^{-t}(t^2/2 + C) + 1$

e) $y(t) = Ce^{2t} - 3e^t$

f) $y(t) = \frac{1}{t^2}(\text{sen}\,t - t\cos t + C)$

g) $y(t) = (t^2 + C)e^{-t^2}$

h) $y(t) = 3(t-2) + Ce^{-t/2}$

i) $y(t) = Ct - te^{-t}$

j) $y(t) = Ce^{-t} + \text{sen}\,(2t) - 2\cos\,(2t)$

k) $y(t) = Ce^{-t/2} + 3(t^2 - 4t + 8)$

7 a) $y = 2e^{2t}(t-1) + 3e^t$

b) $y = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{t^{-2}}{12}$

c) $y = \frac{e^{-2t}}{2}(t^2 - 1)$

d) $y = \frac{\text{sen}\,t}{t^2}$

e) $y = (t+2)e^{2t}$

f) $y = \frac{\text{sen}\,t + (\pi^2/4) - 1}{t^2} - \frac{\cos t}{t}$

g) $y = \frac{-e^{-t}(1+t)}{t^4}$

8 a) $y = t^{-2}(c - t\cos t + \text{sen}\,t)$, $y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$;

b) $y = ce^{-t/2} + 3(t-2)$; y é assintótico a $3(t-2)$ quando $t \to \infty$. Assim, $y(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$.

9 $y_0 = -5/2$

11 e) $y = \pm(5t/(2 + 5ct^5))^{1/2}$

f) $y = r/(k + cre^{-rt})$

12 c.1) $y = t + \frac{e^{-t^4/4}}{\int t^2 e^{-t^4/4} dt + c}$

c.2) $y = 1 + \frac{1}{1 - t + ce^{-t}}$

c.3) $y = e^t + \frac{1}{1 + ce^{-t}}$