Introdução às Equações Diferenciais e Ordinárias - 2017.2

Lista 2 - Modelagem, equações autônomas, e Teorema de Existência e Unicidade

1 — Uma colônia de bactérias cresce a uma razão proporcional ao número de bactérias presente. Se o número duplica em 5 horas, quando ela triplicará? Quantas horas serão necessárias para que o número de bactérias aumente de 100 vezes a quantidade original?

2 — Sabe-se que o Césio-137 é um elemento radioativo e que a sua meia-vida é de 30 anos. Suponha que temos uma amostra com $200mg$ de Césio-137.

a) Qual a massa de Césio-137 restante após t anos?

b) Qual será a massa de Césio-137 na amostra após 90 anos?

c) Depois de quanto tempo teremos apenas $1mg$ de Césio-137 na amostra?

3 — Psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam as chamadas curvas de aprendizado. Uma curva de aprendizado é o gráfico de uma função $P(t)$, que representa o conhecimento adquirido por alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. Um modelo para o aprendizado é dado pela equação

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

onde M e k são constantes positiva. A constante $P_0 = P(0) \leqslant M$ representa o conhecimento inicial do indivíduo.

a) Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para $P(t)$.

b) Qual é o limite da expressão encontrada em b) quando $t \to \infty$? Interprete o resultado obtido para concluir o que as constantes k e M representam.

4 — A taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre esse corpo e o meio ambiente. Seja $T(t)$ a temperatura desse corpo em função do tempo.

a) Com as informações dadas (e definindo as constantes necessárias), escreva a equação diferencial que a função $T(t)$ deve satisfazer.

b) Suponha que um corpo com temperatura desconhecida é colocado em um refrigerador mantido à temperatura constante de $-20°C$. Se após 20 minutos a temperatura do corpo é $40°C$ e após 40 minutos é $20°C$, qual a temperatura inicial do corpo?

5 — Um tanque contém 400ℓ de uma mistura de água e cloro com uma concentração de $0,05g$ de cloro por litro. Para reduzir a concentração de cloro temos três opções: **I)** A primeira é bombear água pura (sem cloro) para o tanque a uma taxa de $4\ell/min$; **II)** a segunda é bombear um mistura de água com cloro (concentração de $0,03g$ de cloro por litro) a uma taxa de $6\ell/min$; **III)** a terceira opção, por sua vez, é bombear uma outra mistura de água com cloro (concentração de $0,05g$ de cloro por litro) a uma taxa de $8\ell/min$. Em todos os casos, a mistura dentro do tanque é constantemente agitada e retirada a uma taxa de $10\ell/min$.

a) Calcule o volume de líquido no tanque, em função do tempo, em cada um dos casos.

b) Em cada um dos casos, calcule a quantidade de cloro (em gramas) no tanque em função do tempo.

c) Suponha que queremos obter, dentro do tanque, uma concentração de $0,04g$ de cloro por litro. Quando isso ocorre, as válculas de entrada e saída de líquido do tanque são fechadas. Com qual das três opções essa concentração é obtida mais rapidamente? (Calcule o tempo correspondente). Com qual das três opções conseguimos o maior volume de líquido com essa concentração? (Calcule o volume correspondente.)

6 — Um novo produto é introduzido no mercado através de uma campanha publicitária cujo alvo são os N_0 habitantes de uma cidade X. A taxa com que a população fica sabendo sobre o produto é proporcional ao número de pessoas que ainda não ouviram falar sobre o produto. Supondo que no início da campanha ninguém conheça o produto e que, ao fim de dois anos, metade da população tenha ouvido falar sobre o produto, qual será a fração da população que terá ouvido falar sobre o produto ao fim de quatro anos?

7 — Um circuito elétrico possui uma fonte de $\epsilon = 5\text{V}$ (5 volts), resistência de $R = 10\Omega$ (10 ohms) e uma capacitância de $C = 10^{-2}\text{F}$ (10^{-2} faraday). Inicialmente, a carga no capacitor é 5 coulombs. Um circuito como esse, em que a resistência e o capacitor estão ligados em série, é denominado circuito RC. Sabemos que a ddp (diferença de potencial) fornecida pela fonte alimenta a resistência e o capacitor. Se $q(t)$ determina a carga no capacitor em função do tempo e $i(t) = dq(t)/dt$ representa a corrente elétrica em função do tempo, então a ddp requerida pela resistência é dada por $Ri(t)$ enquanto a ddp requerida pelo capacitor é dada por $q(t)/C$.

a) Determine a corrente transitória $i(t)$.

b) Determine $\lim_{t\to\infty} i(t)$ e interprete o resultado.

c) Suponha que, ao invés da fonte de $\epsilon = 5\text{V}$ (5 volts), tivessemos uma fonte de corrente alternada, para a qual a ddp varia com o tempo de acordo com $\epsilon(t) = 5\,\text{sen}(400t)$ [t é medido em segundos e ϵ em volts]. Mantendo todos os outros parâmetros do circuito inalterados, qual seriam agora as respostas dos itens a) e b) acima?

8 — Uma equação que modela o crescimento populacional é a equação de Gompertz,

$$\frac{dy}{dt} = ry\ln(K/y),$$

onde r e K são constantes positivas.

a) Esboce o gráfico de $f(y) = ry\ln(K/y)$ em função de y. A partir daí encontre os pontos críticos dessa equação diferencial autônoma e determine se cada um deles é estável ou instável.

b) Resolva a equação de Gompertz sujeita a condição inicial $y(0) = y_0$.

c) O modelo de Gompertz foi aplicado à uma certa população de peixes. Seja $y(t)$ a massa total (em kg) desta população num instante t. Os parâmetros da equação foram estimados, tendo como valores $r = 0,71/\text{ano}$ e $K = 80,5 \times 10^6\text{kg}$. Se a massa inicial é $y_0 = K/4$, encontre a massa total desta população após 2 anos.

d) Para os mesmos dados do item anterior, determine o instante τ no qual $y(\tau) = 3K/4$.

9 — Considere as equações autônomas abaixo. Em cada caso, determine os pontos críticos da equação e classifique-os quando a sua estabilidade. Sem resolver explicitamente as equações diferenciais, esboce os gráficos das suas soluções para diferentes condições iniciais $y(0) = y_0$.

(a) $\frac{dy}{dt} = 6y + 2y^2$

(b) $\frac{dy}{dt} = e^y - 1$

(c) $\frac{dy}{dt} = e^{-y} - 1$

(d) $y' = (y^2 - 3y + 2)e^y$

(e) $y' = y(y-1)(y-2)$

(f) $y' = y^2(y^2 - 1)$

(g) $y' = y^2(1-y)^2$

(h) $y' = 2y - 3\sqrt{y}$

10 — O modelo de Von Bertalanffy para crescimento de peixes estabelece que o aumento do peso do peixe é proporcional à área de sua superfície externa (anabolismo) e o decaimento é proposrcional à energia consumida (catabolismo). Este modelo é descrito pela equação diferencial autônoma

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são chamadas constantes de anabolismo e catabolismo, respectivamente.

a) Encontre todos os pontos de equilíbrio da equação acima e classifique-os quanto a sua estabilidade.

b) Para cada condição inicial $p(0) = p_0 \geqslant 0$ estude o comportamento da solução $p(t)$ quando $t \to \infty$.

11 — Considere a equação diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$. É possível garantir a unicidade de uma solução que passa pelo ponto $(1, 4)$? E de uma solução que passa pelo ponto $(2, -3)$? Justifique.

12 — Nos itens seguintes, determine a região no plano ty onde as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções são satisfeitas.

(a) $y' = \dfrac{t-y}{2t+5y}$ (b) $y' = (1-t^2-y^2)^{1/2}$

(c) $y' = \dfrac{\ln|ty|}{1-t^2+y^2}$ (d) $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$

(e) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1+t^2}{3y-y^2}$

13 — O problema de valor inicial

$$y' - \frac{2}{x}y = 0, \qquad y(0) = 0$$

tem duas soluções: $y(x) = 0$ e $y(x) = x^2$. Por que este resultado não contradiz o teorema de Existência e Unicidade das soluções? Explique detalhamente.

Respostas dos Exercícios

1 $\frac{dN}{dt} = kN(t) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{kt}$.
$N(5) = 2N_0 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5}$ hora^{-1}.
$N(t) = 3N_0 \Rightarrow t = \frac{5\ln 3}{\ln 2}$ horas $\approx 7{,}295$ horas.
$N(t) = 100N_0 \Rightarrow t = \frac{10\ln 10}{\ln 2}$ horas $\approx 33{,}219$ horas.

2 a) $\frac{dm}{dt} = -km(t) \Rightarrow m(t) = m_0 e^{-kt}$, $m_0 = 200$, $m(30) = \frac{m_0}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{30}$ anos^{-1}.

b) $m(90) = 25\,\text{mg}$.

c) $m(t) = 1 \Rightarrow t = \left(90 + \frac{60\ln 5}{\ln 2}\right)$ anos $\approx 229{,}316$ anos.

3 a) $P(t) = M - (M - P_0)e^{-kt}$.

b) $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = M$. Logo, M representa o conhecimento final adquirido, após um tempo infinito de estudos. Como $P_0 \leqslant M$, a função $P(t)$ nunca é descrescente e, portanto, M respresenta o máximo conhecimento possível. A constante k por outro lado, é uma constante de proporcionalidade que representa quão rápido o conhecimento é adquirido.

4 a) A equação é $\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_m)$, onde T_m é a temperatura do meio ambiente. Observe que $k > 0$, pois se a temperatura do meio ambiente é menor do que a do corpo ($T(t) > T_m$), então o corpo deve esfriar e sua temperatura diminuir ($dT/dt < 0$). Resolvendo, temos $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$.

b) Temos $T_m = -20°$C. Fazendo $T(20) = 40$ e $T(40) = 20$, encontramos $k = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ min^{-1} e $T_0 = 70°$C.

5 a) Mostre que a EDO é $V'(t) = r_{in} - r_{out}$, onde r_{in} é a taxa de entrada e r_{out} é a taxa de saída. Resolva para encontrar $V_I(t) = 400 - 6t$, $V_{II}(t) = 400 - 4t$, $V_{III}(t) = 400 - 2t$.

b) Mostre que a EDO é $Q'(t) = C_{in} r_{in} - \frac{r_{out} Q(t)}{V(t)}$, onde C_{in} é a concentração do líquido que entra. Resolva para encontrar:

$$\begin{aligned}
Q_I(t) &= \frac{(200-3t)^{5/3}}{200\sqrt[3]{5}} \approx 0{,}002924(200-3t)^{5/3},\\
Q_{II}(t) &= \frac{3(100-t)}{25} + \frac{(100-t)^{5/2}}{12500}\\
&\approx 0{,}12(100-t) + 0{,}00008(100-t)^{5/2},\\
Q_{III}(t) &= 20 - t/10.
\end{aligned} \tag{1}$$

c) Calcule as concentrações correspondentes fazendo $C(t) = Q(t)/V(t)$ em cada caso. Então resolva a equação $C(t) = 0.04$ para encontrar o tempo correspondente em cada caso. Com esse tempo t, calculamos $V(t)$ para encontrar o volume correspondente. Assim:
Caso I: $t = \frac{200-64\sqrt{5}}{3}$ min $\approx 18{,}96$ min, $V(t) = 128\sqrt{5}\,\ell \approx 286{,}22\,\ell$,
Caso II: $t = \left(100 - 50\sqrt[3]{2}\right)$ min $\approx 37{,}00$ min, $V(t) = 200\sqrt[3]{2}\,\ell \approx 251{,}98\,\ell$,
Caso III: a concentração se mantém constante igual a $0{,}05\,\text{g}/\ell$. Portanto, é impossível obter o que se deseja nesse caso.
A conclusão é que no caso I a concentração desejada é obtida mais rapidamente. Dentre as três opções, no caso I se obtém também o maior volume.

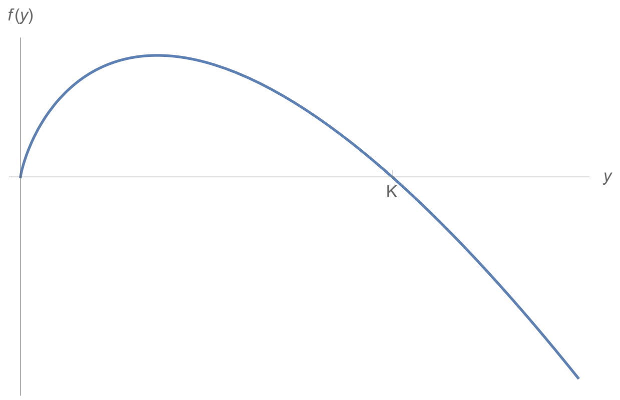
6 Seja $S(t)$ o número de habitantes que sabem sobre o produto no instante t. Logo, o número de habitantes que ainda não ouviram falar do produto é, em um instante t, $N_0 - S(t)$. Pelo enunciado temos $S(0) = 0$ e $\frac{dS}{dt} = k(N_0 - S)$, onde k é uma constante que representa a efetividade da campanha publicitária. Temos então $S(t) = N_0(1 - e^{-kt})$. Fazendo $S(2) = N_0/2$, encontramos $k = \frac{\ln 2}{2}$ ano^{-1} e, portanto, $S(4) = \frac{3N_0}{4}$.

7 a) A EDO é $\epsilon(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \Rightarrow q'(t) = \frac{\epsilon(t) - \frac{q(t)}{C}}{R}$. No caso $\epsilon(t) = \epsilon = \text{constante} = 5$, temos uma EDO separável. Como $q(0) = 5$, encontramos $q(t) = \frac{1}{20}\left(99e^{-10t} + 1\right)$. Logo, $i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{99}{2}e^{-10t}$. [O sinal negativo indica que a corrente elétrica flui no sentido oposto ao que foi inicialmente convencionado ao montar o problema - nesse caso, indica que a corrente flui do terminal negativo da fonte para o terminal positivo].

b) Usando o resultado acima, temos $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = 0$.

c) A EDO é a mesma de antes, porém agora $\epsilon(t)$ não é mais constante e a EDO não é separável. Como ela é linear, podemos resolvê-la usando o fator integrante. Com isso, $q(t) = \frac{160140e^{-10t} + \text{sen}(400t) - 40\cos(400t)}{32020}$, e $i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{10\left(-8007e^{-10t} + 80\,\text{sen}(400t) + 2\cos(400t)\right)}{1601}$. Repare que, matematicamente, não existe $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)$. Fisicamente, como a fonte possui uma ddp que oscila, passado um tempo suficientemente longo, a corrente também oscilará [de acordo com $i = \frac{800\,\text{sen}(400t) + 20\cos(400t)}{1601}$].

8 a) Os pontos críticos são aqueles em que $f(y) = 0$. Claramente isso ocorre para $y = K$. Note que a função não está definida em $y \leqslant 0$ (por causa do logaritmo). Mesmo assim, o limite $\lim\limits_{y\to 0} f(y)$ existe. Como $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 0$, dizemos que $y = 0$ também é ponto crítico. O esboço do gráfico de $f(y)$ é:



Para $0 < y < K$, temos $y'(x) = f(y) > 0$ e, portanto, $y(x)$ é crescente. Portanto, nessa região, $y(x)$ tende a crescer, se afastando de $y = 0$ e se aproximando de $y = K$. Por outro lado, para $y > K$, temos $y'(x) = f(y) < 0$ e, portanto, $y(x)$ é decrescente. Com isso, nessa região, $y(x)$ tende a se aproximar de $y = K$. A conclusão é que o ponto de equilíbrio $y = K$ é estável enquanto o ponto de equilíbrio $y = 0$ é instável.

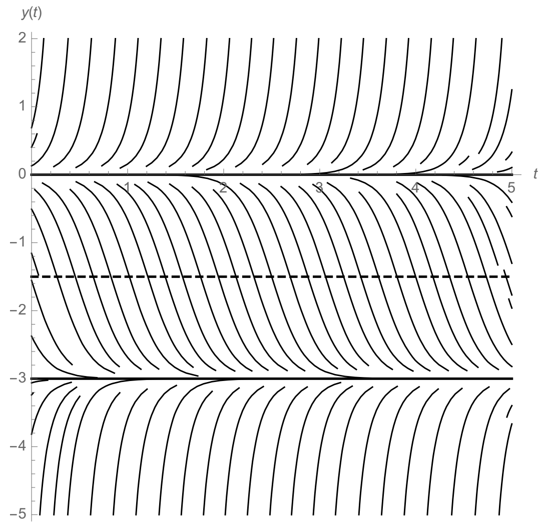
b) Essa é uma equação separável. Faça a substituição $z = \ln(K/y)$ para integrar e use $y(0) = y_0$ para encontrar $y(x) = K\left(\frac{y_0}{K}\right)^{e^{-rt}}$.

c) Substituindo os valores na solução acima, encontra-se $y(2) \approx 5.75797 \times 10^7$ kg.

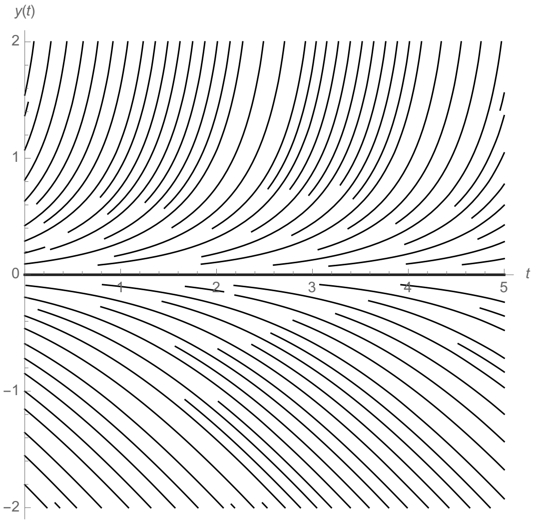
d) $y(\tau) = 3K/4 \Rightarrow \tau \approx 2,212$ anos.

9 Em cada caso temos uma equação autônoma do tipo $\frac{dy}{dt} = f(y)$. Os pontos críticos são as soluções da equação $f(y) = 0$, correspondendo a soluções da EDO que são constantes (pois $dy/dt = 0$). Para saber se o ponto de equilíbrio é estável ou instável, você deve analisar os sinais de $f(y)$ para saber onde $y(t)$ é crescente e onde é decrescente. Para analisar a concavidade do gráfico de $y(t)$, você deve analisar os sinais de $f'(y)f(y)$, pois $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt} = f'(y)f(y)$. Os esboços correspondentes em cada caso são (linhas pretas horizontais indicam os pontos de equilibrio; linhas tracejadas horizontais indicam mudança de concavidade):

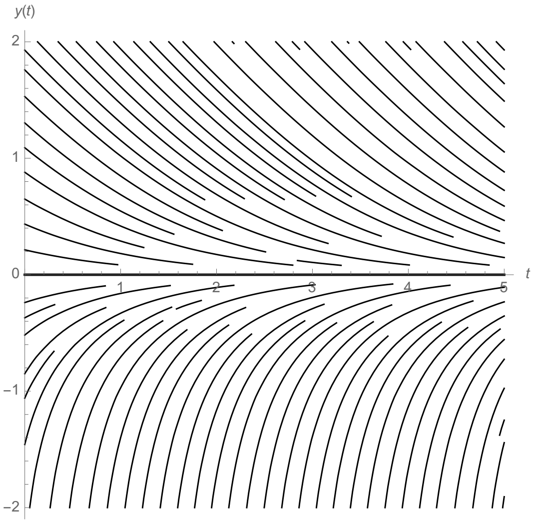
a) Ptos críticos: $-3, 0$. Mud. de concavidade: $-3/2$.



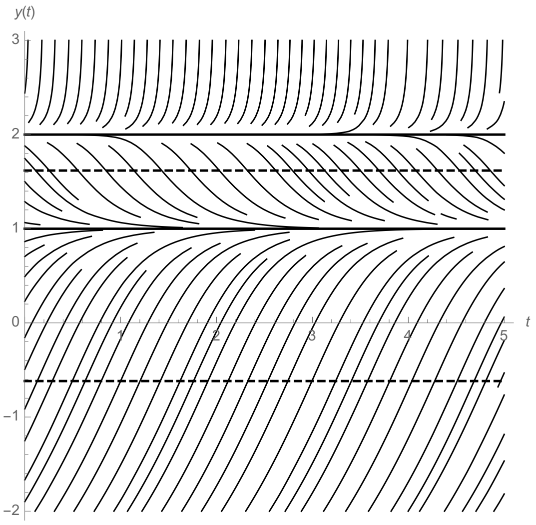
b) Ptos críticos: 0.



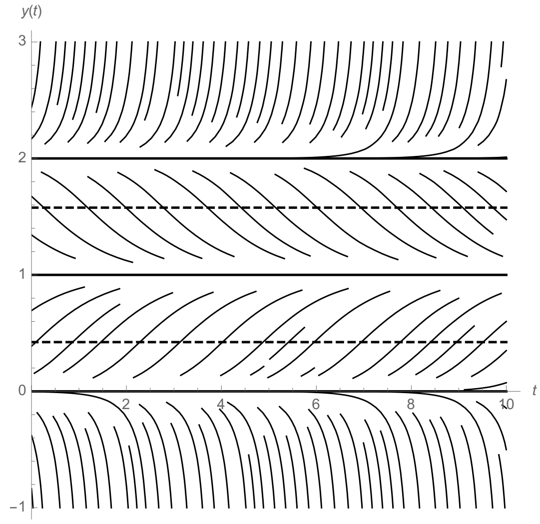
c) Ptos críticos: 0.



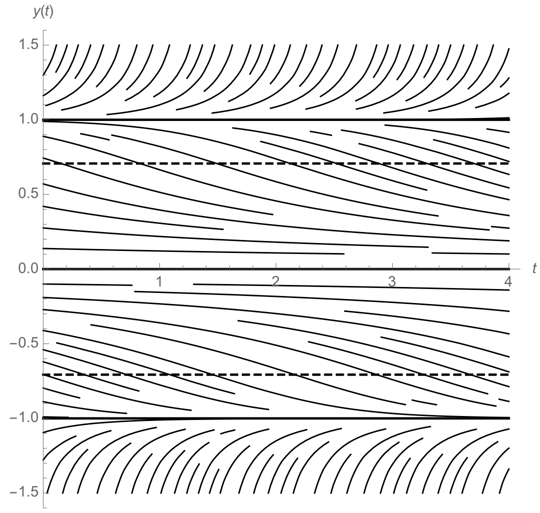
d) Ptos críticos: $1, 2$. Mud. de concavidade: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$



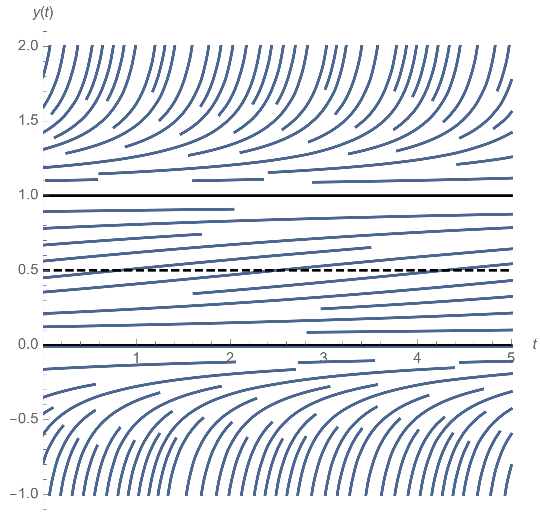
e) Ptos críticos: $0, 1, 2$. Mud. de concavidade: $\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$



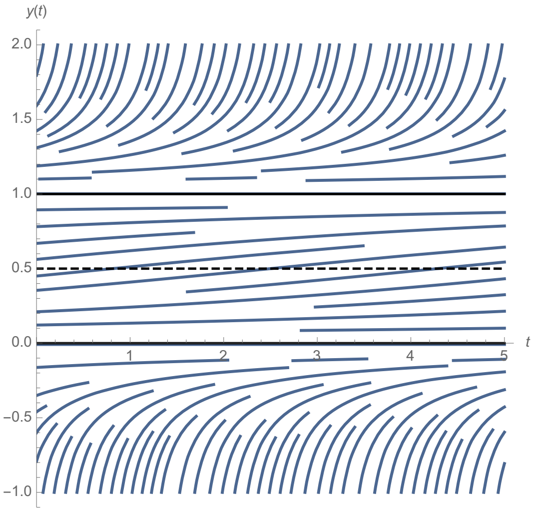
f) Ptos críticos: $-1, 0, 1$. Mud. de concavidade: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



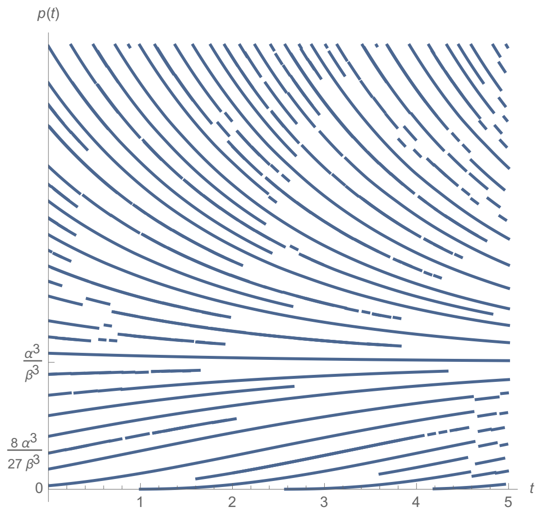
g) Ptos críticos: $0, 1$. Mud. de concavidade: $\frac{1}{2}$



h) Ptos críticos: $0, \frac{9}{4}$. Mud. de concavidade: $\frac{9}{16}$



10 Os pontos de equilíbrio são $p = 0$ (instável) e $p = \frac{\alpha^3}{\beta^3}$ (estável). O esboço das soluções é para diferentes valores iniciais é:



11 Temos $f(x,y) = \sqrt{y^2-9}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2-9}}$. A região do plano xy onde podemos garantir a aplicação do TEU é $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < -3 \text{ ou } y > 3\}$. Portanto, podemos garantir existência e unicidade da solução que passa por $(1,4)$. Por outro lado, não podemos aplicar o TEU em $(2,-3)$. Temos, portanto, que tentar resolver explicitamente a equação nesse caso. Como a equação dada é separável, podemos integrá-la para encontrar a solução $y(x) = -3\cosh(2-x)$, que satisfaz $y(2) = -3$. Com isso, garantimos a existência de solução passando por $(2,-3)$. Observando a equação, é fácil perceber que a função constante $y(x) = -3$ também satisfaz a EDO e a condição $y(2) = -3$. Como encontramos explicitamente duas soluções distintas passando pelo ponto $(2,-3)$, não temos unicidade de soluções nesse caso.

12 a) Temos $f(t,y) = \frac{t-y}{2t+5y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{7t}{(2t+5y)^2}$. Consequentemente, podemos aplicar o TEU em todos os pontos do plano com exceção daquelas que estão na reta $y = -2t/5$. A região de validade do TEU é, portanto, $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2t+5y \neq 0\}$.

b) Temos $f(t,y) = \sqrt{-t^2-y^2+1}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{-t^2-y^2+1}}$. Consequentemente, podemos aplicar o TEU em todos os pontos do plano que estão dentro do círculo de raio 1, isto é $t^2+y^2 < 1$. A região de validade do TEU é, portanto, $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t^2+y^2 < 1\}$.

c) Temos $f(t,y) = \frac{\log|ty|}{-t^2+y^2+1}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-t^2-2y^2\log|ty|+y^2+1}{y(-t^2+y^2+1)^2}$. Consequentemente, podemos aplicar o TEU em todos os pontos do plano com exceção daqueles que estão nas retas $t = 0$ ou $y = 0$ e daqueles que estão na hipérbole $t^2 - y^2 = 1$. A região de validade do TEU é, portanto, $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \neq 0, y \neq 0, t^2-y^2 \neq 1\}$.

d) Temos $f(t,y) = \left(t^2+y^2\right)^{3/2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y\sqrt{t^2+y^2}$. Consequentemente, podemos aplicar o TEU em todos os pontos do plano, sem exceção. A região de validade do TEU é, portanto, $\mathbb{R}^2$.

e) Temos $f(t,y) = \frac{t^2+1}{3y-y^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(t^2+1)(2y-3)}{(y-3)^2y^2}$. Consequentemente, podemos aplicar o TEU em todos os pontos do plano com exceção daqueles que estão nas retas $y = 0$ ou $y = 3$. A região de validade do TEU é, portanto, $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0, y \neq 3\}$.

13 Temos $y' = f(x,y) = \frac{2y}{x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$. Logo, o TEU não pode ser aplicado nos pontos do plano em que $x = 0$. Em particular, não podemos aplicar o TEU para a condição inicial $y(0) = 0$ e, por isso, o fato de existirem duas soluções distintas passando pelo mesmo ponto não contradiz o TEU. Lembre que quando o TEU não pode ser aplicado, não podemos dizer nada nem sobre a existência nem sobre a unicidade de soluções (a menos que utilizemos algum outro método para análise).