Introdução às Equações Diferenciais e Ordinárias - 2017.2

Lista 3 - EDOs de segunda ordem lineares e homogêneas

1 — Dado o PVI

$$2y'' - 3y' + y = 0, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 1/2,$$

a) determine sua solução;

b) determine o valor máximo da sua solução;

c) determine o ponto em que sua solução vale zero.

2 — Considere os PVIs abaixo:

$$\textbf{I)}\;\; y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 2,$$

$$\textbf{II)}\;\; 4x'' - x = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = \beta.$$

a) Determine o valor de α para que a solução de **I** se aproxime de zero quando $t \to \infty$;

b) Determine o valor de β para que a solução de **II** se aproxime de zero quando $t \to \infty$.

3 — Considere as EDOs abaixo:

$$\textbf{I)}\;\; y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0,$$

$$\textbf{II)}\;\; x'' + (3 - \beta)x' - 2(\beta - 1)x = 0.$$

a) Para quais valores de α podemos garantir que todas as soluções de **I** se aproximam de zero quando $t \to \infty$?

b) Para quais valores de α podemos garantir que todas as soluções de **I** (com exceção da solução trivial) são ilimitadas quando $t \to \infty$?

c) Para quais valores de β podemos garantir que todas as soluções de **II** se aproximam de zero quando $t \to \infty$?

d) Para quais valores de β podemos garantir que todas as soluções de **II** (com exceção da solução trivial) são ilimitadas quando $t \to \infty$?

4 — Dados os pares de funções abaixo (que são soluções de alguma EDO de segunda ordem, linear e homogênea, com coeficientes contínuos em toda a reta), encontre o Wronskiano em cada caso e determine se cada conjunto de funções é linearmente independente ou linearmente dependente em $(-\infty, \infty)$:

(a) $\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$,	(b) $\{\operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t \cos t\}$,
(c) $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$,	(d) $\{t^2, 4t - 3t^2\}$,
(e) $\{t^2 + 5t, t^2 - 5t\}$,	(f) $\{e^{3x}, e^{3x-1}\}$.

5 — Dado um PVI do tipo

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0,$$

onde $p(t)$, $q(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo o ponto t_0 (ou seja, $t_0 \in I$), existe um teorema de existência e unicidade que garante a existência de exatamente uma solução $y = \phi(t)$ para o problema. O teorema garante também que o domínio da solução é, no mínimo, o próprio intervalo I. Sabendo disso, determine em cada caso abaixo o maior intervalo possível no qual podemos garantir a existência de uma única solução para o PVI através do teorema de existência e unicidade. Não tente resolver explicitamente as equações.

(a) $ty'' + 3y = t$,	$y(1) = 1,\ y'(1) = 2$
(b) $(t-1)y'' - 3ty' + 4y = \operatorname{sen} t$,	$y(0) = 0,\ y'(0) = 2$
(c) $t(t-4)y'' + 3ty' + 4y = \operatorname{sen} t$,	$y(2) = 2,\ y'(2) = 1$
(d) $y'' + (\cos t)y' + 3(\ln\|t\|)y = 0$,	$y(2) = 3,\ y'(2) = 1$
(e) $(x-3)y'' + xy' + (\ln\|x\|)y = 0$,	$y(1) = 0,\ y'(1) = 1$
(f) $(x-2)y'' + y' + (x-2)(\operatorname{tg} x)y = 0$,	$y(3) = 1,\ y'(3) = 2$

6 — Considerando o princípio da superposição de soluções de EDOs,

a) Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são duas soluções da equação diferencial $t^2y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Mostre que $c_1t^2 + c_2t^{-1}$ também é solução dessa equação quaisquer que sejam c_1 e c_2;

b) Verifique que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = \sqrt{t}$ são duas soluções da equação diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$

para $t > 0$. Mostre que $c_1 + c_2\sqrt{t}$ não é, em geral, solução dessa equação. Explique por que esse resultado não contradiz o princípio da superposição.

7 — Considerando a definição do Wronskiano, responda:

a) Se o Wronskiano entre $f(t)$ e $g(t)$ é $3e^{4t}$ e $f(t) = e^{2t}$, encontre $g(t)$;

b) Se o Wronskiano entre $f(t)$ e $g(t)$ é t^2e^t e $f(t) = t$, encontre $g(t)$;

c) Suponha que o Wronskiano entre $f(t)$ e $g(t)$ é $t\cos t - \operatorname{sen} t$. Se $u(t) = f(t) + 3g(t)$ e $v(t) = f(t) - g(t)$, encontre o Wronskiano entre $u(t)$ e $v(t)$.

8 — Verifique que as soluções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial dada. Elas constituem um conjunto fundamental de soluções?

a) $y'' + 4y = 0; \quad y_1(t) = \cos 2t, \quad y_2(t) = \operatorname{sen} 2t$

b) $y'' - 2y' + y = 0; \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = te^t$

c) $(1 - x\operatorname{cotg} x)y'' - xy' + y = 0,$
$0 < x < \pi, \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} x$

9 — Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $4y'' + y' = 0$ (b) $y'' + 16y = 0$
(c) $y'' + 2y' - 3y = 0$ (d) $2y'' - 3y' + y = 0$
(e) $y'' + 5y = 4y'$ (f) $y'' + 2y' + y = 0$
(g) $y'' - y' - 6y = 0$ (h) $y'' - 8y = 0$
(i) $y'' - 2y' + 2y = 0$ (j) $\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 25y = 0$
(k) $9\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + y = 0$ (l) $y'' + 6y' + 13y = 0$

10 — Encontre a solução dos problemas de valor inicial dados abaixo. Em cada caso faça um esboço da solução encontrada (opcional) e determine os limites $\lim_{t\to-\infty} y(t)$ e $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

(a) $y'' + 4y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
(b) $y'' - 6y' + 9y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$
(c) $y'' + 4y' + 3y = 0,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$
(d) $4y'' + 12y' + 9y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -4$
(e) $y'' - 2y' + 5y = 0,$ $y(\pi/2) = 0,\ y'(\pi/2) = 2$
(f) $y'' + 4y' + 5y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
(g) $y'' + 8y' - 9y = 0,$ $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$

11 — Considerando as soluções não-triviais das equações abaixo, determine (quando possível) os limites $\lim_{t\to-\infty} y(t)$ e $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

(a) $6y'' - 7y' + 2y = 0$
(b) $y'' - 8y' + 16y = 0$
(c) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

12 — Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é:
(a) $y = c_1e^{-3t} + c_2e^{5t}$
(b) $y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$
(c) $y = c_1\cos 3t + c_2\operatorname{sen} 3t$

13 — Neste exercício iremos obter a fórmula de Euler seguindo os seguintes passos:

(a) Mostre que $y_1 = \cos t$ e $y_2 = \operatorname{sen} t$ formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + y = 0$.

(b) Em seguida, prove que $y = e^{it}$ também é solução de $y'' + y = 0$.
(c) Justifique o fato de podermos escrever $e^{it} = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t$ para c_1 e c_2 apropriados.

(d) Faça $t = 0$ em $e^{it} = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t$ para mostrar que $c_1 = 1$.

(e) Derive $e^{it} = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t$ e faça $t = 0$ para concluir que $c_2 = i$.

(f) Obtenha a fórmula de Euler.

14 — Algumas EDOs de segunda ordem com coeficientes não-constantes podem ser resolvidas com o auxílio de uma mudança de variáveis. É o caso da equação $t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Neste exercício iremos aprender a resolver a equação acima, que é genericamente conhecida como equação de Euler:
(a) Faça a substituição $x = \ln t$ e calcule $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$ em termos de $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(b) Usando os resultados do item (a), mostre que a EDO original é equivalente a $\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dx} + \beta y = 0$. Repare que essa é uma equação com coeficientes constantes e, portanto, fácil de ser resolvida. Após resolvê-la e encontrar sua solução geral, fazemos novmente a transformação $x = \ln t$ para encontrarmos a solução geral em termos da variável original t.

(c) Utilizando o método descrito acima, resolva:
(c.1) $t^2y'' + ty' + y = 0,$
(c.2) $t^2y'' + 3ty' + \frac{5}{4}y = 0,$
(c.3) $t^2y'' - 4ty' - 6y = 0,$
(c.4) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0.$

15 — Considere os PVIs abaixo:

I) $y'' - y' + \dfrac{1}{4}y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \alpha,$

II) $9x'' + 12x' + 4x = 0, \quad x(0) = \beta > 0, \quad x'(0) = -1.$

a) Para que valores de α a solução de **I** é sempre crescente?

b) Para que valores de β a solução de **II** é sempre positiva?

16 — Em cada item abaixo, são dadas uma EDO e uma de suas soluções. Usando o método da redução de ordem, encontre uma segunda solução que é linearmente independente em relação à primeira.

a) $y'' + 5y' = 0,\ y_1(t) = 1,$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y_1(t) = e^{2t},$

c) $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0,\ t > 0,\ y_1(t) = t^2,$

d) $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0,\ t > 0,\ y_1(t) = t,$

e) $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0,\ t > 0,\ y_1(t) = t,$

f) $xy'' - y' + 4x^3y = 0,\ x > 0,\ y_1(x) = \operatorname{sen}(x^2),$

g) $(x-1)y'' - xy' + y = 0,\ x > 1,\ y_1(x) = e^x,$

h) $x^2y'' - \left(x - \frac{3}{16}\right)y = 0,\ x > 0,\ y_1(x) = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}},$

i) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,\ x > 0,\ y_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}.$

17 — Diferentemente dos problemas de valor inicial (PVI), nos quais são dados $y(t_0)$ e $y'(t_0)$, nos problemas de valor de contorno (PVC) são dados $y(t_1)$ e $y(t_2)$, sendo $t_1 \neq t_2$. Para se resolver um PVC procedemos como no caso de um PVI: após encontrar a solução geral da EDO em termos de constantes arbitrárias C_1 e C_2, utilizamos as condições dadas para determinar C_1 e C_2. Considerando a EDO $y'' - 2y' + 2y = 0$, reponda:

a) Utilizando o teorema de existência e unicidade enunciado no exercício 5, em quais pontos (t, y) do plano ty podemos garantir a existência e unicidade de soluções?

b) Se tivermos as condições de contorno $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 1$, qual a solução do PVC associado à EDO dada?

c) Se tivermos as condições de contorno $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, qual a solução do PVC associado à EDO dada?

d) Se tivermos as condições de contorno $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$, qual a solução do PVC associado à EDO dada?

e) As respostas dos itens (b)-(d) contrariam as conclusões do item (a)? Esclareça.

Respostas dos Exercícios:

1 a) $y(t) = 3e^{t/2} - e^t.$

b) $9/4.$

c) $t = 2\ln 3.$

2 a) Temos $y(t) = \frac{2}{3}(\alpha-1)e^{-1} + \frac{1}{3}(\alpha+2)e^{2t}$. Logo, para que $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ deve-se ter $\alpha = -2$.

b) Temos $x(t) = (1-\beta)e^{-\frac{t}{2}} + (\beta+1)e^{t/2}$. Logo, para que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ deve-se ter $\beta = -1$.

3 As soluções gerais são $y(t) = C_1e^{(\alpha-1)t} + C_2e^{\alpha t}$ e $x(t) = C_1e^{(\beta-1)t} + C_2e^{-2t}$. Logo:

a) Quando $\alpha < 0$ e $\alpha - 1 < 0$ simultaneamente, ou seja, quando $\alpha < 0$.

b) Quando $\alpha > 0$ e $\alpha - 1 > 0$, ou seja, quando $\alpha > 1$.

c) Quando $\beta - 1 < 0$, ou seja, quando $\beta < 1$.

d) Nunca, pois todas as soluções que possuem $C_1 = 0$ tendem a zero quando $t \to \infty$.

4 Se existir pelo menos um t_0 tal que o Wronskiano é diferente de zero, i.e. $W(t_0) \neq 0$, as funções serão LI; caso contrário, são LD.

a) $W(t) = e^{-4t}$, LI;

b) $W(t) = 0$, LD;

c) $W(t) = (\lambda_2 - \lambda_1)\, e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$, LI se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e LD se $\lambda_1 = \lambda_2$;

d) $W(t) = -4t^2$, LI;

e) $W(t) = 10t^2$, LI;

f) $W(t) = 0$, LD.

5 (a) $(0, \infty)$, (b) $(-\infty, 1)$, (c) $(0, 4)$, (d) $(0, \infty)$, (e) $(0, 3)$, (f) $(2, 3\pi/2)$.

6 b) Porque a equação é não-linear.

7 a) Usando a definição do Wronskiano, encontramos a seguinte EDO para $g(t)$: $g'(t) - 2g(t) = 3e^{2t}$. Resolvendo, descobrimos que $g(t)$ pode ser qualquer função do tipo $Ce^{2t} + 3te^{2t}$.

b) Usando a definição do Wronskiano, encontramos a seguinte EDO para $g(t)$: $tg'(t) - g(t) = e^t t^2$. Resolvendo, descobrimos que $g(t)$ pode ser qualquer função do tipo $Ct + e^t t$.

c) É possível mostrar que $W[u, v] = -4W[f, g]$ e, portanto, $W[u, v] = 4(\operatorname{sen} t - t \cos t)$.

8 (a) Sim, pois calculando o Wronskiano temos $W(t) = 2$. Como existe pelo menos um valor de t para o qual $W(t) \neq 0$, concluimos que as funções são LI e, portanto, formam um conjunto completo de soluções.
(b) Sim, pois calculando o Wronskiano temos $W(t) = e^{2t}$. Como existe pelo menos um valor de t para o qual $W(t) \neq 0$, concluimos que as funções são LI e, portanto, formam um conjunto completo de soluções.
(c) Sim, pois calculando o Wronskiano temos $W(x) = x \cos x - \operatorname{sen} x$. Como existe pelo menos um valor de x para o qual $W(x) \neq 0$, concluimos que as funções são LI e, portanto, formam um conjunto completo de soluções.

9 a) $y(t) = c_1 + c_2 e^{-t/4}$

b) $y(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$

c) $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$

d) $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{t/2}$

e) $y(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$

f) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

g) $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$

h) $y(t) = c_1 e^{2t\sqrt{2}} + c_2 e^{-2t\sqrt{2}}$

i) $y(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$

j) $y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t}$

k) $y(t) = c_1 e^{-t/3} + c_2 t e^{-t/3}$

l) $y(t) = e^{-3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$

10 a) $y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$,

b) $y(t) = 2te^{3t}$,

c) $y(t) = \frac{5}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$,

d) $y(t) = e^{-3t/2} - \frac{5}{2} t e^{-3t/2}$,

e) $y(t) = -e^{t-\pi/2} \operatorname{sen} 2t$,

f) $y(t) = e^{-2t}(\cos t + 2 \operatorname{sen} t)$,

g) $y(t) = \frac{1}{10} e^{-9(t-1)} + \frac{9}{10} e^{t-1}$.

11 (a) $y(t) = c_1 e^{2t/3} + c_2 e^{t/2}$. Logo, $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$, e

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \begin{cases} +\infty, \text{ se } C_1 > 0 \text{ ou se } C_1 = 0 \text{ e } C_2 > 0, \\ -\infty, \text{ se } C_1 < 0 \text{ ou se } C_1 = 0 \text{ e } C_2 < 0. \end{cases}$$

(b) $y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}$. Logo, $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$, e

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \begin{cases} +\infty, \text{ se } C_2 > 0 \text{ ou se } C_2 = 0 \text{ e } C_1 > 0, \\ -\infty, \text{ se } C_2 < 0 \text{ ou se } C_2 = 0 \text{ e } C_1 < 0. \end{cases}$$

(c) $y(t) = c_1 e^t \operatorname{sen}(2t) + c_2 e^t \cos(2t)$. Logo, $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$ e o limite não existe quando $t \to +\infty$.

12 Em cada caso, perceba primeiro que a solução geral dada é compatível com uma EDO de segunda ordem linear homogênea com coeficientes constantes. Sabendo disso, identifique quais são as raízes do polinômio característico, e use isso para determinar o polinômio característico. A partir do polinômio característico, determine a EDO.
(a) Raízes são: $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 5$. Logo, o polinômio característico é $(t + 3)(t - 5) = t^2 - 2t - 15$ e, portanto, a EDO é $y'' - 2y' - 15y = 0$;
(b) Raízes são: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Logo, o polinômio característico é $(t + 2)^2 = t^2 + 4t + 4$ e, portanto, a EDO é $y'' + 4y' + 4y = 0$; (c) Raízes são: $\lambda_1 = 3i$ e $\lambda_2 = -3i$. Logo, o polinômio característico é $(t - 3i)(t + 3i) = t^2 + 9$ e, portanto, a EDO é $y'' + 9y = 0$.

13 c) Mostre que $\{\cos t, \operatorname{sen} t\}$ é um conjunto completo de soluções e, portanto, $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ é solução geral da EDO, isto é, qualquer outra solução (em particular e^{it}, pode ser escrita como combinação linear de $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$.

14 a) $y(t) = C_1 \cos(\ln t) + C_2 \operatorname{sen}(\ln t)$,

b) $y(t) = \frac{C_1}{t} \operatorname{sen}\left(\frac{\ln t}{2}\right) + \frac{C_2}{t} \cos\left(\frac{\ln t}{2}\right)$,

c) $y(t) = C_1 t^6 + \frac{C_2}{t}$,

d) $y(t) = \frac{C_1}{t^2} + \frac{C_2}{t^2} \ln t$.

15 a) Temos $y(t) = e^{t/2}((\alpha - 1)t + 2)$ e $y'(t) = \frac{1}{2} e^{t/2}(2\alpha + (\alpha - 1)t)$. Logo, para garantir que $y'(t) > 0$ sempre precisamos de $\alpha = 1$.

b) Temos $x(t) = \frac{1}{3} e^{-\frac{2t}{3}}(3\beta + (2\beta - 3)t)$. Logo, para garantir que $x(t) > 0$ sempre precisamos de $\beta = 3/2$.

16 a) $y_2(t) = e^{-5t}$,

b) $y_2(t) = te^{2t}$,

c) $y_2(t) = t^3$,

d) $y_2(t) = t^{-2}$,

e) $y_2(t) = te^t$,

f) $y_2(x) = \cos(x^2)$,

g) $y_2(x) = x$,

h) $y_2(x) = x^{1/4} e^{-2\sqrt{x}}$,

i) $y_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$,

17 a) Em qualquer ponto do plano.

A solução geral da EDO é $y(t) = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \operatorname{sen} t$. Usando as condições de contorno, encontra-se:

b) $y(t) = e^t \cos t + e^{t - \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t$;

c) $y(t) = C_2 e^t \operatorname{sen} t$, sendo C_2 arbitrário;

d) não há solução para o PVC dado.

e) O TEU enunciado no exercício 5 garante a existência e unicidade de soluções de um PVI apenas. Como estamos resolvendo PVCs, não faz sentido tentar aplicar esse TEU. OBS: existe também uma versão do TEU para problemas de valor de contorno, veja por exemplo `http://www.cems.uvm.edu/~tlakoba/math337/notes_6.pdf`.