# Introdução às Equações Diferenciais e Ordinárias - 2017.2

## Lista 4 - EDOs de segunda ordem lineares e não-homogêneas, e aplicações de EDOs em sistemas mecânicos e elétricos

**1 —** Usando o método dos coeficientes indeterminados, encontre a solução geral das equações diferenciais abaixo:

a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$;

b) $y'' + 2y' + 5y = 3\,\text{sen}(2t)$;

c) $y'' - y' - 2y = -2t + 4t^2$;

d) $y'' - y' = -3$;

e) $y'' + 2y' = 3 + 4\,\text{sen}(2t)$;

f) $y'' + 9y = t^2e^{3t} + 6$;

g) $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$;

h) $y'' + y = 3\,\text{sen}(2t) + t\cos(2t)$;

i) $y'' + y = 2t\,\text{sen}\,t$;

j) $u'' + \omega_0^2 u = \cos\omega t$, sendo $\omega^2 \neq \omega_0^2$;

k) $u'' + \omega_0^2 u = \cos\omega_0 t$;

l) $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$;

m) $y'' - 10y' + 25y = 30t + 3$.

**2 —** Encontre a solução dos problemas de valor inicial abaixo:

a) $y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

b) $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$;

c) $y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$;

d) $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

e) $y'' + 4y = 3\,\text{sen}(2t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$;

f) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos(2t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

g) $y'' - y = te^{3t}, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 1$;

h) $y'' + y' - 2y = t, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = 2$;

i) $y'' + 4y = -2, \quad y(\pi/8) = 1/2, \quad y'(\pi/8) = 2$.

**3 —** Determine a solução geral das equações abaixo usando o método da variação dos parâmetros (repare que o método dos coeficientes indeterminados também é aplicável nesses casos):

a) $y'' + 4y = t$;

b) $y'' - 3y' + 2y = \text{sen}\,t$;

c) $y'' - 2y' + y = e^{2t}$;

d) $y'' - y' = e^t$;

e) $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$.

**4 —** Determine a solução geral das equações abaixo:

a) $y'' + y = \text{tg}(t), \quad 0 < t < \pi/2$;

b) $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}, \quad t > 0$;

c) $y'' + 4y = 3\csc(2t), \quad 0 < t < \pi/2$;

d) $y'' + 9y = 9\sec^2(3t), \quad 0 < t < \pi/6$;

e) $4y'' + y = 2\sec(t/2), \quad -\pi < t < \pi$;

f) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$.

**5 —** Em cada um dos itens abaixo é dada uma EDO linear não-homogênea e uma solução $y_1$ da equação homogênea associada. Determine em cada caso a solução geral da equação dada.

a) $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad t > 0, \quad y_1(t) = t^2$;

b) $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}, \quad t > 0, \quad y_1(t) = e^t$;

c) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln x, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2$;

d) $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = e^x$, $x > 0$, $y_1(x) = e^x$;

e) $xy'' - 2x\,\text{cotg}\,xy' + x(1 + 2\,\text{cotg}^2 x)y = \text{sen}\,x\ln x$, $x > 0$, $y_1(x) = \text{sen}\,x$.

**6 —** Resolva os PVIs abaixo:

a) $x^2y'' - (x^2 + 2x)y' + (x+2)y = x^2 - x^3\ln x$, sendo $y(1) = 0$ e $y'(1) = 0$, e sabendo que $y_1(x) = x$ é solução da equação homogênea associada;

b) $y'' - 3x^2y' - 6xy = 6x$, sendo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, e sabendo que $y_1(x) = e^{x^3}$ é solução da equação homogênea associada.

**— Fixando a notação: nos exercícios 7-15, temos sistemas massa-mola. Em geral, para resolvê-los denotamos $x(t)$ como sendo o deslocamento da massa a partir de sua posição de equilíbrio. Pela segunda lei de Newton, encontramos a EDO que descreve o movimento**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{resulante}} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_{\text{externa}}(t) \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_{\text{externa}}(t),$$

**onde $m$ representa a massa, $k$ é a constante da mola, e $\gamma$ é a constante de amortecimento. Quando a força externa é nula, teremos em muitos casos soluções oscilatórias do tipo**

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(C_1\cos(\omega t) + C_2\cos(\omega t)\right),$$

**que podem ser reescritas como**

$$x(t) = e^{-\alpha t}A\cos(\omega t + \varphi),$$

**onde $\alpha, \omega, C_1, C_2, A, \varphi$ são constantes. Quando $\alpha = 0$, $A$ é chamada de amplitude, $\omega/2\pi$ é a frequência, e $\varphi$ é a fase. Quando $\alpha \neq 0$, dizemos que $\omega/2\pi$ é a quasi-frequência. OBS: nos exercícios e no gabarito convencionamos que a orientação do eixo $x$ é para cima (no caso de movimentos verticais) e para a direita (no caso de movimentos horizontais). Se outra convenção for adotada, algumas respostas deverão ter sinais trocados.**

**7 —** Uma mola, com uma massa de 4 kg acoplada, tem um comprimento natural de 1 m e é mantida esticada até um comprimento de 1,3 m por uma força de 24,3 N. Se a mola for comprimida até um comprimento de 0,8 m e for solta com velocidade zero, determine a posição da massa em qualquer instante $t$.

**8 —** Uma massa de 100 g estica, apenas com o seu peso, uma certa mola em 5 cm. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade vertical para baixo de $10\,cm/s$, determine a posição da massa em qualquer instante de tempo $t$ (despreze todas as forças de atrito). Quando a massa retorna para sua posição de equilíbrio pela primeira vez?

**9 —** Uma massa de 2 kg provoca uma distensão de 0,32 m em uma mola. A massa é solta de uma posição 2/3 m acima da posição de equilíbrio com uma velocidade de $5m/s$ para baixo.

a) Encontre a equação de movimento.
b) Determine a amplitude e o período do movimento.

**10 —** Uma mola de constante elástica $20\ N/m$ é presa a uma partícula de massa 2 kg. Tal sistema encontra-se num meio onde há a ação de uma força dissipativa $F_d$ proporcional à velocidade da partícula $v$, com constante de proporcionalidade $-44\ N.s/m$ (ou seja, $F_d = -44v$). Assuma que não existe força externa agindo sobre a partícula. Suponha que no instante $t = 0$ soltamos a massa da sua posição de equilíbrio com velocidade de 12 m/s para cima. **a)** Descreva a posição da partícula em função do tempo. **b)** O que acontece com a partícula quando $t \to \infty$?

**11 —** Uma massa de 3 kg estica um mola em 3 m. A partir da posição de equilíbrio, a massa é deslocada 1 m para cima e colocada em movimento com uma velocidade de $2m/s$ para baixo. Assumindo que não haja atrito, determine a posição da massa em qualquer instante de tempo. Determine a frequência, o período, a amplitude e a fase do movimento.

**12 —** Uma mola é esticada 10 cm por uma força de 3 N. Uma massa de 2 kg é pendurada pela mola e sofre uma força de atrito proporcional a sua velocidade (quando sua velocidade é $2\ m/s$, a força de atrito é, em módulo, 30 N). Supondo que a massa é puxada 5 cm para baixo e colocada em movimento com uma velocidade de 10 cm/s para baixo, determine a sua posição em qualquer instante de tempo. Se fosse possível alterar a força de atrito, quando deveria ser a constante de proporcionalidade entre a força de atrito e a velocidade para que o movimento fosse criticamente amortecido?

**13 —** Uma massa de $1kg$ é atada a uma mola cuja a constante elástica é $16\ N/m$ e o sistema inteiro é submerso em um líquido que oferece uma força de amortecimento (em Newtons) numericamente igual a 10 vezes a velocidade instantânea da massa (em $m/s$). Determine as equações do movimento (i.e. a posição da massa em qualquer instante) quando:

a) a massa parte do repouso a um ponto $1m$ abaixo da posição de equilíbrio;

b) a massa parte de um ponto $1m$ abaixo da posição de equilíbrio com velocidade $12m/s$ para baixo.

**14 —** A uma mola de constante elástica 1 $N/m$ é atada uma massa de 1 kg. A massa sofre ação de uma força externa de $3\cos(\omega t)$ N. Se a massa é colocada em movimento de sua posição de equilíbrio e com velocidade inicial zero, determine:

a) qual o problema de valor inicial que descreve o movimento da massa;

b) qual é a solução do problema de valor inicial para $\omega \neq 1$;

c) qual é o comportamento da solução obtida em b) quando $t \to \infty$;

d) o que acontece com a solução obtida em b) quando consideramos valores de $\omega$ cada vez mais próximos de 1;

e) qual é a solução do problema de valor inicial para $\omega = 1$ e esboce o gráfico da solução. Essa situação é denominada ressonância pois a força externa tem a mesma frequência das oscilações naturais do sistema.

**15 —** A mola de um sistema massa-mola tem constante de 3 $N/m$. É presa uma massa de 2 kg na mola e o movimento se dá em um fluido viscoso que oferece resistência (em Newtons) numericamente igual ao módulo da velocidade instantânea (em $m/s$). O sistema sofre a ação de uma força externa de $3\cos(3t) - 2\,\text{sen}(3t)$ N. Se a massa parte da posição de equilíbrio e em repouso, determine:

a) a posição da massa em função do tempo;

b) a posição do estado estacionário;

c) repita os itens a) e b) se ao invés de $3\cos(3t) - 2\,\text{sen}(3t)$ N, a força externa fosse dada por $e^{-t}$ N;

d) Repita os itens a) e b) se ao invés de $3\cos(3t) - 2\,\text{sen}(3t)$ N, a força externa fosse dada por $e^{-t/4}\cos\left(\frac{t\sqrt{23}}{4}\right)$ N.

**— Fixando a notação: nos exercícios 16-18, temos circuitos elétricos. Denotamos $q(t)$ como sendo a carga no capacitor, de modo que $i(t) = dq/dt$ representa a corrente que passa pelo circuito. De modo geral, um resistor R, um capacitor C e um indutor $L$ estão ligados em série a uma fonte cuja força eletromotriz é $\epsilon(t)$. Esse circuito é denominado RLC. Sabendo que a ddp entre os terminais de uma resistência é $Ri(t)$, entre os terminais de um capacitor é $q(t)/C$, e entre os terminais de um indutor é $Ldi/dt$, temos pela lei de Kirchoff que**

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \epsilon(t),$$

**em completa analogia a uma sistema massa-mola. Teremos em muitos casos soluções oscilatórias do tipo**

$$q(t) = e^{-\alpha t}\left(C_1\cos(\omega t) + C_2\cos(\omega t)\right),$$

**que podem ser reescritas como**

$$q(t) = e^{-\alpha t}A\cos(\omega t + \varphi),$$

**onde $\alpha, \omega, C_1, C_2, A, \varphi$ são constantes. Quando $\alpha = 0$, $A$ é chamada de amplitude, $\omega/2\pi$ é a frequência, e $\varphi$ é a fase. Quando $\alpha \neq 0$, dizemos que $\omega/2\pi$ é a quasi-frequência.**

**16 —** Um circuito possui um indutor de $5/3$ H, um resistor de $10\,\Omega$, e um capacitor de $30 \times 10^{-3}$ F ligados em série. Inicialmente a carga no capacitor é nula e a corrente que passa no circuito é 2 A. (a) Determine a carga no capacitor e a corrente no circuito em função do tempo. b) Qual é a carga no capacitor e a corrente no circuito quando $t \to \infty$. c) Se quisermos trocar o resistor do circuito para ter um amortecimento crítico, qual deverá ser o novo valor da resistência? d) Repita os itens a) e b) assumindo a resistência encontrada em c) e mantendo todos os outros parâmetros inalterados.

**17 —** Um circuito possui um indutor de 1 H e um capacitor de $10^{-4}$ F ligados em série a uma fonte que proporciona uma força eletromotriz que depende do tempo de acordo com $100\,\text{sen}(50t)$ V. Inicialmente a carga no capacitor e a corrente que passa no circuito são nulas. (a) Determine a carga no capacitor e a corrente no circuito em função do tempo. b) Em que instantes de tempo a carga no capacitor é zero? c) Repita o item (a) assumindo que uma resistor de $205\,\Omega$ é ligado em série juntamente com o capacitor e com o indutor.

**18 —** Um circuito possui um indutor de 1 H, um resistor de $220\,\Omega$, e um capacitor de $2.5 \times 10^{-6}$ F ligados em série a uma bateria de 12 V. Inicialmente a carga no capacitor e a corrente que passa no circuito são nulas. (a) Determine a carga no capacitor e a corrente no circuito em função do tempo. b) Qual é a carga no capacitor e a corrente no circuito quando $t \to \infty$?

# Respostas dos exercícios:

**1** Para encontrar a solução geral, primeiro encontramos duas soluções linearmente independentes $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da EDO homogênea associada. Em seguida, encontramos uma solução particular da EDO não-homogênea. Nesse exercício você deve usar o método dos coeficientes indeterminados para isso. Para implementar o método, assumimos que a solução particular $y_p(t)$ da EDO não-homogênea possui uma determinada forma [que dependerá de um (ou mais) coeficientes não conhecidos]. Substituindo então $y_p(t)$ na EDO não-homogênea, é possível encontrar os coeficientes indeterminados. Se a parte homogênea da EDO tem coeficientes constantes (como nesse exercício) e o termo não-homogêneo da EDO envolve funções polinomiais e/ou funções exponenciais e/ou funções seno e cosseno (como nesse exercício), podemos sempre encontrar uma solução particular usando esse método [veja a tabela 3.6.1 do Boyce (edição 8) ou a tabela 3.5.1 do Boyce (edições 9 e 10) para mais detalhes sobre a solução particular que deve ser assumida]. Depois de encontrar $y_p(t)$, podemos escrever a solução geral como sendo $y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + y_p(t)$. Nesse exercício, as soluções gerais são:

a) $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} - e^{2t}$

b) $y(t) = C_1e^{-t}\,\text{sen}(2t) + C_2e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{17}\,\text{sen}(2t) - \frac{12}{17}\cos(2t)$

c) $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - 2t^2 + 3t - \frac{7}{2}$

d) $y(t) = C_1e^{t} + C_2 + 3t$

e) $y(t) = -\frac{1}{2}C_1e^{-2t} + C_2 + \frac{3t}{2} - \frac{1}{2}\,\text{sen}(2t) - \frac{1}{2}\cos(2t)$

f) $y(t) = C_1\,\text{sen}(3t) + C_2\cos(3t) + \frac{1}{18}e^{3t}t^2 - \frac{1}{27}e^{3t}t + \frac{e^{3t}}{162} + \frac{2}{3}$

g) $y(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + e^{-t}t^2$

h) $y(t) = C_1\,\text{sen}(t) + C_2\cos(t) - \frac{5}{9}\,\text{sen}(2t) - \frac{1}{3}t\cos(2t)$

i) $y(t) = C_1\,\text{sen}(t) + C_2\cos(t) - \frac{1}{2}t^2\cos(t) + \frac{1}{2}t\,\text{sen}(t)$

j) $y(t) = C_1\,\text{sen}(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t) + \frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}$

k) $y(t) = C_1\,\text{sen}(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t) + \frac{t\,\text{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0}$

l) $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + \frac{3}{8}e^{-t}t^2 + \frac{3}{16}te^{-t}$

m) $y(t) = C_1e^{5t} + C_2te^{5t} + \frac{6t}{5} + \frac{3}{5}$

**2** Faça como no exercício 1 para encontrar a solução geral. Use então as condições iniciais para determinar as constantes arbitrárias da solução geral.

a) $y(t) = -t + e^{t} - \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{1}{2}$

b) $y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{3e^t}{5} + \frac{7}{10}\,\text{sen}(2t) - \frac{19}{40}\cos(2t) - \frac{1}{8}$

c) $y(t) = \frac{e^t t^3}{6} + 4e^t t - 3e^t + 4$

d) $y(t) = -te^{2t} + e^{3t} - \frac{2e^{2t}}{3} + \frac{2e^{-t}}{3}$

e) $y(t) = -\frac{1}{8}\,\text{sen}(2t) - \frac{1}{4}3t\cos(2t) + 2\cos(2t)$

f) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\,\text{sen}(2t) + e^{-t}t\,\text{sen}(2t) + e^{-t}\cos(2t)$

g) $y(t) = \frac{3}{32}e^{3t} + \frac{t}{8}e^{3t} + \left(-\frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{4\pi}}{32} + \frac{1}{8}e^{4\pi}\pi\right)e^{-t} + \left(\frac{e^{-\pi}}{2} + \frac{e^{2\pi}}{8} - \frac{1}{4}e^{2\pi}\pi\right)e^{t}$

h) $y(t) = -\frac{t}{2} - \frac{3}{4}e^{-2(t+2)} + e^{t+2} - \frac{1}{4}$

i) $y(t) = \sqrt{2}\,\text{sen}(2t) - \frac{1}{2}$

**3** Assim como no ex. 1, para encontrar a solução geral primeiro encontramos duas soluções linearmente independentes $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da EDO homogênea associada. Em seguida, encontramos uma solução particular da EDO não-homogênea. Nesse exercício, porém, você deve usar o método da variação dos parâmetros. Nesse método, temos uma fórmula para $y_p(t)$ dada por

$$y_p(t) = -y_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{y_2(s)g(s)}{W[y_1,y_2](s)}\,ds + y_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{y_1(s)g(s)}{W[y_1,y_2](s)}\,ds,$$

onde $g(s)$ é a parte não=homogenea da EDO (i.e. seu lado direito) e $W[y_1, y_2]$ é o Wronskiano entre as soluções $y_1$ e $y_2$ da EDO homogênea associada. Depois de usar a fórmula e encontrar $y_p(t)$, podemos escrever a solução geral como sendo $y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + y_p(t)$. As respostas são:

a) $y(t) = C_1\,\text{sen}(2t) + C_2\cos(2t) + \frac{t}{4}$

b) $y(t) = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + \frac{1}{10}\,\text{sen}(t) + \frac{3}{10}\cos(t)$

c) $y(t) = C_1e^{t} + C_2e^{t}t + e^{2t}$

d) $y(t) = C_1e^{t} + C_2 + te^{t}$

e) $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - \frac{2}{3}te^{-t}$

**4** Faça exatamente como no exercício 3. As respostas são:

a) $y(t) = C_1\cos t + C_2\,\text{sen}\,t - (\cos t)\ln(\text{tg}\,t + \sec t)$

b) $y(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} - e^{-2t}\ln t$

c) $y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{4} \operatorname{sen}(2t) \ln(\operatorname{sen}(2t))$ $\frac{3}{2} t \cos(2t)$

d) $y(t) = C_1 \operatorname{sen}(3t) + C_2 \cos(3t) + \operatorname{sen}(3t) \ln(\operatorname{tg}(3t) + \sec(3t)) - 1$

e) $y(t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) \ln\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

f) $y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t - \frac{1}{2} e^t \ln\left(t^2 + 1\right) + e^t t \operatorname{arctg} t$

**5** Use o método da redução de ordem para encontrar uma segunda solução da EDO homogênea associada: faça a substituição $y(t) = y_2(t) = y_1(t)u(t)$ na EDO homogênea e encontre a equação correspondente para $u(t)$. Resolva essa equação para encontrar a nova solução $y_2(t)$. Use então o método dos coeficientes indeterminados ou da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular $y_p(t)$ da EDO não-homogênea. A solução geral será então dada por $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t)$.

a) $y(t) = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t} - \frac{t^2}{3} + t^2 \ln(t) + \frac{1}{2}$

b) $y(t) = C_1 e^t - C_2(t+1) + \frac{1}{2} e^{2t}(t-1)$

c) $y(t) = C_1 x^2 + 2C_2 x^2 \ln(x) + \frac{1}{6} x^2 \ln^3(x)$

d) $y(t) = C_1 e^x + C_2 e^x \ln(x) + e^x x$

e) $y(t) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 x \operatorname{sen}(x) + x \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2} x \log^2(x) \operatorname{sen}(x) - x \log(x) \operatorname{sen}(x)$

**6** Faça como no exercício 5 para encontrar a solução geral. Use então as condições iniciais para determinar as constantes arbitrárias da solução geral.

a) $y(x) = -x^2 + x^2 \ln(x) + x$

b) $y(x) = -1 + e^{x^3} + e^{x^3} \int_0^x e^{-s^3} ds$

**7** Pela lei de Hooke, ao ser deslocada por $L = 0,3$ m em relação à posição de equilíbrio, a mola exerce uma força restauradora que é compensada por força de $24,3$N. Assim $kL = 24,3 \Rightarrow k = 81$ N/m. A EDO que descreve o movimento da massa é, portanto, $4\ddot{x} + 81x = 0$. Pelas informações dadas no enunciado, temos as condições iniciais $x(0) = -0,8$ e $x'(0) = 0$. Resolvendo o PVI, encontra-se $x(t) = -0,2\cos\left(\frac{9t}{2}\right)$.

**8** Vamos converter todas as unidades para o Sistema Internacional. Assumindo $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, o peso do corpo é $P = 1$ N. Essa força desloca a massa em $L = 0,05$ m. Portanto, $P = kL \Rightarrow k = 20$ N/m. A EDO que descreve o movimento da massa é, portanto, $\frac{1}{10}\ddot{x} + 20x = 0$. Pelas informações dadas no enunciado, temos as condições iniciais $x(0) = 0$ m e $x'(0) = -1/10$. Resolvendo o PVI, encontra-se $x(t) = -\frac{\operatorname{sen}(10\sqrt{2}t)}{100\sqrt{2}}$. Para saber quando a massa retorno à posição de equilíbrio fazemos $x(t) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(10\sqrt{2}t\right) = 0$. O primeiro instante de tempo (depois de $t = 0$) em que isso ocorre é $t = \frac{\pi}{10\sqrt{2}}$ segundos.

**9** Assumindo $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, o peso do corpo é $P = 20$ N. Procedendo como nos itens anteriores, encontramos a constante elástica da mola: $k = 20/0,32 = 125/2$ N/m. A EDO que descreve o movimento da massa é, portanto, $2\ddot{x} + \frac{125}{2}x = 0$. Pelas informações dadas no enunciado, temos as condições iniciais $x(0) = 2/3$ e $x'(0) = -5$. **(a)** Resolvendo o PVI, encontra-se $x(t) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{5\sqrt{5}t}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\left(\frac{5\sqrt{5}t}{2}\right)$. **(b)** Queremos encontrar $A$ e $\varphi$ tal que $\frac{2}{3}\cos\left(\frac{5\sqrt{5}t}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\left(\frac{5\sqrt{5}t}{2}\right) = A\cos(\frac{5\sqrt{5}}{2}t + \varphi)$. Como $A\cos(\frac{5\sqrt{5}}{2}t + \varphi) = A\cos(\frac{5\sqrt{5}}{2}t)\cos(\varphi) - A\operatorname{sen}(\frac{5\sqrt{5}}{2}t)\operatorname{sen}(\varphi)$, comparando com a expressão para $x(t)$, temos que encontrar $A$ e $\varphi$ tais que $A\cos\varphi = \frac{2}{3}$ e $A\operatorname{sen}\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Elevando ao quadrado e somando, temos que $A^2\operatorname{sen}^2\varphi + A^2\cos^2\varphi = \frac{4}{5} + \frac{4}{9} \Rightarrow A^2 = 56/9 \Rightarrow A = \frac{2\sqrt{14}}{3}$. Além disso, dividindo uma expressão pela outra, temos $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) / \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Resumindo, podemos escrever a solução como sendo $x(t) = \frac{2\sqrt{14}}{3}\cos\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}t + \varphi\right)$, onde $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{5}}$. Conclui-se portanto que a amplitude do movimento é $\frac{2\sqrt{14}}{3}$ m. Pra encontrar o período $T$, fazemos $\frac{5\sqrt{5}}{2}T = 2\pi$ e encontramos $T = \frac{4\pi}{5\sqrt{5}}$ segundos. Uma outra maneira de encontrar a amplitude e calcular o valor máximo ou o valor mínimo para $x(t)$, ou seja, a posição do corpo quando ele está em respouso $\dot{x}(t) = 0$. Em outras palavras, derivamos e igualamos a zero a expressão $x(t) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{5\sqrt{5}t}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\left(\frac{5\sqrt{5}t}{2}\right)$. Resolvemos para $t$ e substituimos os valores encontrados em $x(t)$ para encontrar os valores máximos e mínimos de $x(t)$.

**10** A EDO que descreve o movimento da massa é $2\ddot{x} + 44\dot{x} + 20x = 0$. Pelas informações dadas no enunciado, temos as condições iniciais $x(0) = 0$ m e $x'(0) = 12$. **(a)** Resolvendo o PVI, encontra-se $x(t) = -2\sqrt{\frac{3}{37}}\left(e^{\left(-\sqrt{111}-11\right)t} - e^{\left(\sqrt{111}-11\right)t}\right)$. **(b)** Queremos calcular $\lim_{t\to\infty} x(t)$. Repare que como ambos os expoentes de $x(t)$ são negativos, as duas exponenciais tendem a zero quando $t \to \infty$ e, portanto, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Ou seja, a partícula tende a retornar ao equilíbrio e ficar lá parada.

**11** Procedendo como nos itens anteriores, encontramos a constante elástica da mola: $k = 30/3 = 10$ N/m. A EDO que descreve o movimento da massa é, portanto, $3\ddot{x} + 10x = 0$. Pelas informações dadas no enunciado, temos as condições iniciais $x(0) = 1$ m e $x'(0) = -2$. Resolvendo o PVI, encontra-se $x(t) = \cos\left(\frac{5\sqrt{5}t}{2}\right) - \frac{4}{5\sqrt{5}} \operatorname{sen}\left(\frac{5\sqrt{5}t}{2}\right)$. Fazendo como no exercício **9b**, temos $x(t) = \frac{\sqrt{141}}{5\sqrt{5}} \cos\left(\frac{5\sqrt{5}t}{2} + \varphi\right)$, onde $varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5\sqrt{5}}\right) \approx 0,34$ rad $\approx 19,5°$ é a fase do movimento. A amplitude é $\frac{\sqrt{141}}{5\sqrt{5}} \approx 12,6$ metros e o período é $\frac{4\pi}{5\sqrt{5}} \approx 1,12$ segundos.

**12** Procedendo como nos itens anteriores, encontramos a constante elástica da mola: $k = 3/0,1 = 30$ N/m. A força de atrito é do tipo $F = \gamma v$. Pelos dados do exercícios, encontramos $\gamma = 30/2 = 15$. A EDO que descreve o movimento da massa é, portanto, $2\ddot{x} + 15\ddot{x} + 30x = 0$. Pelas informações dadas no enunciado, temos as condições iniciais $x(0) = -5/100$ m e $x'(0) = -1/10$. Resolvendo o PVI, encontra-se $x(t) = \frac{1}{20} e^{-\frac{15t}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) - \frac{23}{20\sqrt{15}} e^{-\frac{15t}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right)$. Para que o amortecimento fosse crítico, deveríamos ter raízes repetidas no polinômio característico, ou seja, $\gamma^2 = 4mk \Rightarrow \gamma = 4\sqrt{15}$ N/m.

**13** a) $x(t) = -\frac{4}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-8t}$

b) $x(t) = \frac{7}{3} e^{-8t} - \frac{10}{3} e^{-2t}$

**14** a) $\ddot{x} + x = 3\cos\omega t$; $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$;

b) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + \frac{3}{1-\omega^2} \cos\omega t$. Assim a solução do PVI é $x(t) = \frac{3(\cos(t) - \cos(t\omega))}{\omega^2 - 1}$.

c) A solução é oscilatória para todo t. Não existe o limite de $x(t)$ quando t tende ao infinito.

d) Mantendo t fixo, quando $\omega \to 1$ temos uma situação peculiar pois tanto o numerador quanto o denominador denominador de $x(t)$ tendem a zero. Para tratar essa indeterminação, podemos usar a regra de L'Hopital: $\lim_{\omega\to 1} x(t) = \lim_{\omega\to 1} \frac{3(\cos(t) - \cos(t\omega))}{\omega^2 - 1} = \lim_{\omega\to 1} \frac{3t\operatorname{sen}(t\omega)}{2\omega} = \frac{3t\operatorname{sen}(t)}{2}$ (repare que as derivadas da regra de L'Hopital são em relação a $\omega$ pois é em relação a $\omega$ que estamos tomando o limite). Vemos então que $x(t)$ é uma oscilação crescente (ilimitada) quando t tende ao infinito nesse caso.

e) A solução geral do PVI é $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + 3/2 t \operatorname{sen} t$ Assim a solução do PVI é $x(t) = 3/2 t \operatorname{sen} t$, reproduzindo exatamente a solução encontrada em (d).

**15** A EDO que descreve o movimento da massa é $2\ddot{x} + \ddot{x} + 3x = F_{ext}(t)$. Temos uma EDO linear não homogênea para resolver. A parte homogênea tem coeficientes constantes, com soluções $x_1(t) = e^{-\frac{t}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right)$ e $x_2(t) = e^{-\frac{t}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right)$. Para encontrar uma solução particular da EDO, podemos utilizar o método dos coeficientes indeterminados ou o método da variação dos parâmetros. Como a massa parte da posição de equilíbrio e em repouso, temos as condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

a) Como $F_{ext}(t) = 3\cos(3t) - 2\operatorname{sen}(3t)$, chutamos uma solução particular da EDO não-homogênea do tipo $x_p(t) = A\cos(3t) + B\operatorname{sen}(3t)$. Substituindo na EDO, encontramos $A = 1/6$ e $B = -1/6$. Escrevemos a solução geral da EDO e utilizamos as condições iniciais para encontrar a resposta: $x(t) = \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{6}\cos(3t) - \frac{11}{6\sqrt{23}} e^{-\frac{t}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right) + \frac{1}{6} e^{-\frac{t}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right)$

b) À medida que t aumenta, as exponenciais negativas tendem a zero. Por causa disso, para t suficientemente grande, o movimento da massa será descrito por $x(t) = \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{6}\cos(3t)$.

c) Repetindo a ideia do item (a), tentamos uma solução particular da EDO não-homogênea do tipo $x_p(t) = Ae^{-t}$. A solução final obtida é $\frac{e^{-t}}{4} + \frac{3}{4\sqrt{23}} e^{-\frac{t}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right) - \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right)$. Quanto $t \to \infty$, temos que $x(t) \to 0$, ou seja, a partícula tende a ficar parada no ponto de equilíbrio.

d) Vamos repetir novamente a ideia do item (a). Porém, como $e^{-t/4} \cos\left(\frac{t\sqrt{23}}{4}\right)$ é solução da EDO homogênea associada, temos que tentar como solução particular da EDO não-homogênea algo do tipo $x_p(t) = Ate^{-t/4} \cos\left(\frac{t\sqrt{23}}{4}\right) + Bte^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{t\sqrt{23}}{4}\right)$. A solução final para o problema, depois de escrever a solução geral e usar as condições iniciais, é $\frac{e^{-\frac{t}{4}} t \,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right)}{\sqrt{23}}$. Usando a regra de L'Hopital podemos mostrar que $\lim_{t\to\infty}(e^{-\frac{t}{4}}t) = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{\frac{t}{4}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{4}e^{\frac{t}{4}}} = 0$. Como o seno é uma função limitada, temos então que $x(t) \to 0$, ou seja, a partícula tende a ficar parada no ponto de equilíbrio.

**16** A EDO que descreve a carga no circuito é $\frac{5}{3}\frac{d^2q}{dt^2} + 10\frac{dq}{dt} + \frac{1000}{30}q = 0$. As condições iniciais são $q(0) = 0$ e $\dot{q}(0) = 2$.

a) Resolvendo o PVI temos $q(t) = \frac{2e^{-3t}\,\text{sen}(\sqrt{11}t)}{\sqrt{11}}$ C e $i(t) = \dot{q}(t) = 2e^{-3t}\cos\left(\sqrt{11}t\right) - \frac{6e^{-3t}\,\text{sen}(\sqrt{11}t)}{\sqrt{11}}$

b) Quando t tende a infinito, por causa das exponenciais negativos, temos que $q(t) \to 0$ e $i(t) \to 0$.

c) O amortecimento é crítico quando o polinômio característico associado à EDO homogênea tem raízes repetidas. Isso ocorre quando $R^2 = 4L/C$, ou seja, quando $R = \frac{20\sqrt{5}}{3}\,\Omega$.

d) Resolvendo a EDO com o valor de R encontrado acima, temos $q(t) = 2te^{-2\sqrt{5}t}$ C e $i(t) = \dot{q}(t) = 2e^{-2\sqrt{5}t} - 4\sqrt{5}te^{-2\sqrt{5}t}$ A.

**17** A EDO que descreve a carga no circuito é $\ddot{q} + 10000q = 100\,\text{sen}(50t)$. As condições iniciais são $q(0) = 0$ e $\dot{q}(0) = 0$.

a) As soluções da EDO homogênea associada são $\text{sen}(100t)$ e $\cos(100t)$. Para encontrar uma solução particular da EDO não-homogênea, tentamos $q_p(t) = A\,\text{sen}(50t) + B\cos(50t)$ e encontramos $A = 0$, $B = 1/75$. Escrevendo a solução geral e usando as condições iniciais encontramos $q(t) = \left(\frac{1}{75}\text{sen}(50t) - \frac{1}{150}\text{sen}(100t)\right)$ C e $i(t) = \dot{q}(t) = \left(\frac{2}{3}\cos(50t) - \frac{2}{3}\cos(100t)\right)$ A.

b) Usando o fato de que $\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$, podemos reescrever $q(t) = \frac{1}{75}\text{sen}(50t)(1 - \cos(50t))$. Fazendo $q(t) = 0$, encontramos $\text{sen}(50t) = 0$ ou $\cos(50t) = 1$. Portanto, a carga no capacitor é zero quando $t = k\frac{\pi}{50}$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

c) Nesse caso EDO para a ser $\ddot{q} + 205\dot{q} + 10000q = 100\,\text{sen}(50t)$. A solução do PVI é $q(t) = \left(\frac{10}{801}e^{-80t} - \frac{8}{1305}e^{-125t} + \frac{12}{2581}\text{sen}(50t) - \frac{82}{12905}\cos(50t)\right)$ C e $i(t) = \dot{q}(t) = \frac{200}{261}e^{-125t} - \frac{800}{801}e^{-80t} + \frac{820}{2581}\text{sen}(50t) + \frac{600}{2581}\cos(50t)$ A.

**18** A EDO que descreve a carga no circuito é $\ddot{q} + 220\dot{q} + \frac{100000}{25}q = 12$. As condições iniciais são $q(0) = 0$ e $\dot{q}(0) = 0$.

a) A solução do PVI é $q(t) = \left(\frac{e^{-200t}}{3000} - \frac{e^{-20t}}{300} + \frac{3}{1000}\right)$ C e consequentemente $i(t) = \dot{q}(t) = \left(\frac{e^{-20t}}{15} - \frac{e^{-200t}}{15}\right)$ A.

b) Temos $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0,003$ C e $\lim_{t\to\infty} i(t) = 0$.