Introdução às Equações Diferenciais e Ordinárias - 2017.2

Lista 5 - EDOs lineares de ordem superior ($\geqslant 3$) e sistemas de EDOs de primeira ordem

1 — São dadas trincas de funções que são, em cada caso, soluções de alguma EDO de terceira ordem linear, homogênea, e com coeficientes contínuos em toda a reta. Determine, usando o Wronskiano, se as funções dadas são linearmente independentes ou linearmente dependentes no intervalo $(-\infty, \infty)$. Caso sejam linearmente dependentes, escreva uma delas como combinação linear das outras.

a) $f_1(t) = 2t - 3,\ f_2(t) = t^2 + 1,\ f_3(t) = 2t^2 - t;$

b) $f_1(t) = 2t - 3,\ f_2(t) = 2t^2 + 1,\ f_3(t) = 3t^2 + t;$

c) $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^{-1};$

d) $f_1(x) = 5,\ f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x,\ f_3(x) = \cos(2x).$

2 — Verifique que as funções dadas formam em cada caso um conjunto completo de soluções para a EDO correspondente. Escreva a solução geral em cada caso e resolva o PVI dado:

a) $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0,\ x > 0;$
$y(1) = 0,\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 1;$
$y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2,\ y_3(x) = x^{-2}\ln x;$

b) $y'''' + y'' = 0;$
$y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 0,\ y''(\pi) = 1,\ y'''(\pi) = 0;$
$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = \operatorname{sen} x,\ y_4(x) = \cos x.$

3 — Encontre a solução geral das seguintes equações diferenciais:

a) $y''' - 4y'' - 5y' = 0;$

b) $y''' - y = 0;$

c) $y^{(4)} + y''' + y'' = 0;$

d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;$

e) $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y''' - 10y'' + y' + 5y = 0.$

4 — Encontre a solução dos PVIs abaixo:

a) $y''' + 12y'' + 36y' = 0,$
$y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = -7;$

b) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$

5 — Encontre a solução geral das seguintes equações diferenciais:

a) $y''' - 6y'' = 3 - \cos x;$

b) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}.$

6 — Encontre a solução dos PVIs abaixo:

a) $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x},$
$y(0) = 1/2,\ y'(0) = 5/2,\ y''(0) = -9/2;$

b) $y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x},$
$y(0) = -5,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = -4.$

7 — Utilizando o método de redução de ordem, determine a solução geral das EDOs abaixo:

a) $(2-t)y''' + (2t-3)y'' - ty' + y = 0,\ t < 2,$ sabendo que $y_1(t) = e^t$ é solução;

b) $t^2(t+3)y''' - 3t(t+2)y'' + 6(1+t)y' - 6y = 0,$ $t > 0$, sabendo que $y_1(t) = t^2$ é solução.

8 — Considere os sistemas abaixo. Em cada caso: (i) encontre a solução geral do sistema; (ii) determine e classifique o ponto de equilíbrio em $(x, y) = (0, 0)$, explicando o que acontece quando $t \to \infty$.

(a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 2y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 4y \end{cases}$

9 — Resolva o sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + 3t \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2t \end{cases}$ dadas as condições iniciais $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

10 — Seja μ uma constante real satisfazendo $\mu \neq -1$. Mostre que $(x, y) = (0, 0)$ é sempre um ponto de equilíbrio instável do sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

Para quais valores de μ o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela? Para quais valores de μ o ponto $(0, 0)$ é um ponto espiral instável? Para quais valores de μ o ponto $(0, 0)$ é um ponto nó instável? (Os valores de μ para os quais as características do equilíbrio mudam são chamados de bifurcações.)

Respostas dos exercícios:

1 Se existir pelo menos um t_0 tal que o Wronskiano é diferente de zero, i.e. $W(t_0) \neq 0$, as funções serão LI; caso contrário, são LD.

a) $W(t) = 14$, LI;

b) $W(t) = 0$, LD; temos $\frac{1}{2}f_1(t) + \frac{3}{2}f_2(t) = f_3(t)$.

c) $W(x) = \frac{6}{x}$, LI;

d) $W(x) = 0$, LD; temos $\frac{1}{5}f_1(x) - 2f_2(x) = f_3(x)$.

2 Em cada caso devemos substituir as funções dadas na EDO para verificar se são soluções ou não. Em seguida, devemos calcular o Wronskiano entre as funções para verificar se são linearmente independentes ou não. Depois de verificar que são soluções e são linearmente independentes, escrevemos a solução geral $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x)$ e através das condições iniciais determinamos C_1, C_2 e C_3. Os resultados são:

a) $y(x) = -\frac{x}{7} + \frac{x^2}{7} - \frac{\ln(x)}{7x^2}$;

b) $y(x) = 1 + \cos(x)$.

3 Em cada caso temos uma EDO linear homogênea com coeficientes constantes. Para encontrar um conjunto completo de soluções, tentamos soluções do tipo $y(t) = e^{\lambda t}$. Com isso, obtemos uma equação polinomial para a variável λ que tem o mesmo grau da EDO. As raízes desse polinômio correspondem a soluções da EDO. Em caso de raiz dupla λ, tanto $e^{\lambda t}$ como $te^{\lambda t}$ são soluções; em caso de raiz tripla, tanto $e^{\lambda t}$ como $te^{\lambda t}$ e $t^2e^{\lambda t}$ são soluções; e assim por diante. Por fim, escrevemos a solução geral fazendo uma combinação linear (com coeficientes arbitrários) das soluções encontradas. Os resultados são:

a) $\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 5$,
$y(x) = C_1 + C_2e^{-t} + \frac{C_3}{5}e^{5t}$;

b) $\lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$y(x) = C_1e^t + C_2e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + C_3e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$ ou
$y(x) = D_1e^t + D_2e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + D_3e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$;

c) $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lambda_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$y(x) = C_1 + C_2t + C_3e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + C_4e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$ ou
$y(x) = D_1 + D_2t + D_3e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + D_4e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$;

d) $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$,
$y(x) = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t$.

e) $\lambda^5 + 5\lambda^4 - 2\lambda^3 - 10\lambda^2 + \lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -1,\ \lambda_5 = -5$,
$y(x) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-t} + C_4te^{-t} + C_5e^{-5t}$.

4 Para encontrar a solução geral, devemos seguir os passos do exercício 3. Depois de encontrada a solução geral, usamos as condições iniciais dadas para fixar as constantes arbitrárias. Os resultados são:

a) $y(t) = \frac{e^{-3t}}{10} - \frac{e^{-t}}{6} + \frac{e^{2t}}{15}$;

b) $y(t) = \frac{5}{36} - \frac{11}{36}e^{6(1-t)} + \frac{1}{6}te^{6(1-t)}$.

5 Para encontrar a solução geral, primeiro encontramos um conjunto completo de soluções da EDO homogênea associada. Em seguida, encontramos uma solução particular da EDO não-homogênea usando o método dos coeficientes indeterminados. Basicamente, olhando para o lado direito das equações, tentamos um "chute inteligente"para $y_p(t)$. Depois de encontrar $y_p(t)$, podemos escrever a solução geral da EDO não-homogênea como sendo $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, onde $y_h(t)$ é a solução geral da EDO homogênea associada.

a) EDO homogênea: $\lambda^3 - 6\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6 \Rightarrow y_h(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{6x}$. Solução particular da EDO não homogênea: o "chute" mais óbvio é $y_p(x) = A + B\cos x + C\,\mathrm{sen}\,x$. Como A é solução da EDO homogênea, temos que trocá-lo por Ax. Como Ax também é solução da EDO homogênea, temos que trocá-lo por Ax^2. Em vista disso, tentamos $y_p(x) = Ax^2 + B\cos x + C\,\mathrm{sen}\,x$ e encontramos $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{6}{37}$, $C = \frac{1}{37}$. A solução geral é, portanto, $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{6x} - \frac{x^2}{4} + \frac{\mathrm{sen}\,x}{37} - \frac{6}{37}\cos x$;

b) EDO homogênea: $\lambda^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1 \Rightarrow y_h(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$. Solução particular da EDO não homogênea: o "chute" mais óbvio é $y_p(x) = Ax + B + Cxe^{-x}$, porém não funciona. Tentando $y_p(x) = (Ax+B)x^2 + Cxe^{-x} + Dx^2e^{-x}$ e encontramos $A = -\frac{2}{3}$, $B = 0$, $C = -\frac{5}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$. A solução geral é, portanto, $y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.

6 Para encontrar a solução geral da EDO, fazemos como no exercício 5. Usamos então as condições iniciais para fixar as constantes que aparecem na solução geral e, com isso, resolvemos o PVI.

a) EDO homogênea: $y_h(x) = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x$. Solução particular da EDO não homogênea: tentamos $y_p(x) = Ax + Bx^2e^x + Ce^{5x}$ e encontramos $A = 2$, $B = -12$, $C = \frac{1}{2}$. A solução geral é, portanto, $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x - \frac{x^2}{4} + \frac{\mathrm{sen}\,x}{37} - \frac{6}{37}\cos x$. Usando as condições iniciais encontramos as constantes C_1, C_2 e C_3:
$y(x) = 20 - 20e^x + 18xe^x + 2x - 12x^2e^x + \frac{1}{2}e^{5x}$;

b) EDO homogênea: $y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3}x\right) + C_3e^x\cos\left(\sqrt{3}x\right)$. Solução particular da EDO não homogênea: tentamos $y_p(x) = A + Bx + Cxe^{-2x}$ e encontramos $A = -\frac{5}{8}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{2}{3}$. A solução geral é, portanto, $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3}x\right) + C_3e^x\cos\left(\sqrt{3}x\right) - \frac{5}{8} + \frac{x}{4} + \frac{2}{3}xe^{-2x}$. Usando as condições iniciais encontramos as constantes C_1, C_2 e C_3:
$y(x) = -\frac{23}{12}e^{-2x} + \frac{17}{24\sqrt{3}}e^x\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3}x\right) - \frac{59}{24}e^x\cos\left(\sqrt{3}x\right) - \frac{5}{8} + \frac{x}{4} + \frac{2}{3}xe^{-2x}$.

7 a) No método de redução de ordem buscamos uma solução do tipo $y_2(t) = u(t)y_1(t) = u(t)e^t$. Substituindo na EDO encontramos a seguinte equação para u: $(t-2)u''' + (t-3)u'' = 0$. Definindo $v(t) = u''(t)$, temos uma EDO de primeira ordem: $(t-2)v' + (t-3)v = 0$. Resolvendo, encontramos $v(t) = C_1e^{-t}(t-2)$. Integrando duas vezes, temos $u(t) = C_1e^{-t}t + C_2t + C_3$ e, portanto, $y_2(t) = u(t)e^t = C_1t + C_2te^t + C_3e^t$. Ou seja, além de e^t, temos t e te^t como soluções da EDO. A solução geral é $y(t) = C_1t + C_2te^t + C_3e^t$;

b) No método de redução de ordem buscamos uma solução do tipo $y_2(t) = u(t)y_1(t) = u(t)t^2$. Substituindo na EDO encontramos a seguinte equação para u: $t(t+3)u''' + 3(t+4)u'' = 0$. Definindo $v(t) = u''(t)$, temos uma EDO de primeira ordem: $t(t+3)v' + 3(t+4)v = 0$. Resolvendo, encontramos $v(t) = \frac{C_1(t+3)}{t^4}$. Integrando duas vezes, temos $u(t) = \frac{C_1}{2}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right) + C_2t + C_3$ e, portanto, $y_2(t) = u(t)t^2 = \frac{C_1}{2}(1+t) + C_2t^3 + C_3t^2$. Ou seja, além de t^2, temos t^3 e $1+t$ como soluções da EDO. A solução geral é $y(t) = K_1(1+t) + K_2t^3 + K_3t^2$.

8 Em cada item temos um sistema do tipo
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by & \text{(I)} \\ \dot{y} = cx + dy & \text{(II)} \end{cases}$$
Repare que em todos os casos temos $b \neq 0$ e $d \neq 0$ (ou seja, as equações sempre misturam x e y). Derivando a equação (I), encontramos $\ddot{x} = a\dot{x} + b\dot{y}$. Utilizando a equação (II), essa equação se torna $\ddot{x} = a\dot{x} + b(cx + dy)$. Isolando y na equação (I) e substituindo nessa última, temos $\ddot{x} = a\dot{x} + bcx + d(\dot{x} - ax)$ e, portanto, $\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (bc - ad)x = 0$. Com isso, transformamos o problema de resolver o sistema de EDOs no problema de resolver uma EDO linear com coeficientes constantes. O polinômio característico associado a essa EDO é, portanto, $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (bc - ad)$. Em termos de matrizes, o sistema pode ser escrito como
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Definindo $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, e sendo $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ repare que encontrar as raízes do polinômio $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (bc - ad)$ é equivalente a resolver a equação $\det(M - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (bc - ad) = 0.$$

Depois de resolver essa equação, encontramos a solução geral para $x(t)$. Pela equação (I), temos $\dot{x} = ax + by \Rightarrow y(t) = \frac{1}{b}\dot{x}(t) - \frac{a}{b}x(t)$ e, portanto, conhecendo $x(t)$ usamos essa equação para encontrar $y(t)$. Em todos os casos, o ponto $(x, y) = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio isolado. O tipo de equilíbrio está relacionado às raízes do polinômio característico. As soluções são:

a) Raízes do polinômio: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$. Como $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$, o ponto de equilíbrio é instável (ponto de sela). A solução geral é:
$x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^t, \quad y(t) = -\frac{C_1}{2}e^{-2t} + C_2e^t;$

b) Raízes do polinômio: $\lambda_1 = 2 + 2i$ e $\lambda_2 = 2 - 2i$. Como $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$ e $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$, o equilíbrio é instável. Como $\mathrm{Im}(\lambda_1) \neq 0$ e $\mathrm{Im}(\lambda_2) \neq 0$, temos uma espiral instável. A solução geral é:
$x(t) = C_1e^{2t}\cos(2t) + C_2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t),$
$y(t) = -C_1e^{2t}\cos(2t) + C_2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t);$

c) Raízes do polinômio: $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$. Como $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$, o equilíbrio é instável (ponto de sela). A solução geral é:
$x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}, \quad y(t) = -2C_1e^{-3t} + \frac{C_2}{2}e^{2t};$

d) Raízes do polinômio: $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$. Como $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$, o equilíbrio é instável (ponto de sela). A solução geral é:
$x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}, \quad y(t) = -\frac{C_1}{2}e^{-3t}2C_2e^{2t};$

e) Raízes do polinômio: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Como $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ e $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$, o equilíbrio é assintoticamente estável. Como $\mathrm{Im}(\lambda_1) = \mathrm{Im}(\lambda_2) = 0$, o ponto de equilíbrio é um nó estável. A solução geral é:
$x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}, \quad y(t) = C_1e^{-t} + \frac{3}{2}C_2e^{-2t};$

f) Raízes do polinômio: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$. Como $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$ e $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$, o equilíbrio é instável. Como $\mathrm{Im}(\lambda_1) = \mathrm{Im}(\lambda_2) = 0$, o ponto de equilíbrio é um nó instável. A solução geral é:
$x(t) = C_1e^{(2+\sqrt{2})t} + C_2e^{(2-\sqrt{2})t},$
$y(t) = C_1\left(1+\sqrt{2}\right)e^{(2+\sqrt{2})t} + C_2\left(1-\sqrt{2}\right)e^{(2-\sqrt{2})t};$

g) Raízes do polinômio: $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Como $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$, o equilíbrio é estável (centro). A solução geral é:
$x(t) = C_1\,\mathrm{sen}\,t + C_2\cos t, \quad y(t) = -C_1\cos(t) + C_2\,\mathrm{sen}(t);$

h) Raízes do polinômio: $\lambda_1 = -3 + 2i$ e $\lambda_2 = -3 - 2i$. Como $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ e $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$, o equilíbrio é estável. Como $\mathrm{Im}(\lambda_1) \neq 0$ e $\mathrm{Im}(\lambda_2) \neq 0$, temos uma espiral estável. A solução geral é:
$x(t) = C_1e^{-3t}\cos(2t) + C_2e^{-3t}\,\mathrm{sen}(2t),$
$y(t) = \left(\frac{-C_1+2C_2}{5}\right)e^{-3t}\cos(2t) + \left(\frac{-2C_1-C_2}{5}\right)e^{-3t}\,\mathrm{sen}(2t).$

9 Repare que não podemos fazer exatamente da mesma maneira que fizemos no exercício anterior. Mas podemos fazer parecido. Em termos de matrizes, esse sistema pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix}.$$

Fazendo uma analogia com o que aprendemos sobre as EDOs lineares, esse sistema pode ser entendido como uma versão não-homogênea dos sistemas homogêneos que aparecem no exercício 8. Derivando a primeira equação do sistema, encontramos $\ddot{x} = -\dot{y} + 3$. Substituindo $\dot{y}$ dado pela segunda equação, temos $\ddot{x} = -4x - 2t + 3 \Rightarrow \ddot{x} + 4x = -2t + 3$. Resolvendo essa EDO linear não-homogênea, encontramos a solução geral $x(t) = C_1\cos(2t) + C_2\,\mathrm{sen}(2t) + \frac{3}{4} - \frac{t}{2}$. Substituindo na primeira equação do sistema e isolando y, temos $y(t) = 2C_1\,\mathrm{sen}(2t) - 2C_2\cos(2t) + \frac{1}{2} + 3t$. Usando as condições iniciais, temos $x(0) = 1 \Rightarrow C_1 + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}$ e $y(0) = 2 \Rightarrow -2C_2 + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{4}$. Com isso, $x(t) = \frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2t) + \frac{3}{4} - \frac{t}{2}$ e $y(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t) + \frac{3}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} + 3t$.

10 Note que a condição $\mu \neq -1$ é importante para que o ponto de equilíbrio seja um ponto de equlíbrio isolado. Quando $\mu = -1$, o sistema se torna $\dot{x} = \dot{y} = -x + y$. Nesse caso, todos os pontos na reta $y = x$ são pontos de equilíbrio e, portanto, $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio que não é isolado. Para $\mu \neq -1$, fazendo como no exercício 8 encontra-se o seguinte polinômio característico: $\lambda^2 - \lambda(\mu+1) + \mu + 1$, cujo discriminante é $\Delta(\mu) = (\mu+1)^2 - 4(\mu+1) = (\mu+1)(\mu-3)$. As raízes desse polinômio característico são $\lambda_1 = \frac{1+\mu}{2} + \frac{\sqrt{\Delta(\mu)}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1+\mu}{2} - \frac{\sqrt{\Delta(\mu)}}{2}$. Para analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio, temos que conhecer $\mathrm{Re}(\lambda_1)$ e $\mathrm{Re}(\lambda_2)$. Se pelo menos um desses valores for positivo, o ponto será instável.

Para encontrar $\mathrm{Re}(\lambda_1)$ e $\mathrm{Re}(\lambda_2)$, precisamos analisar o sinal do discriminante $\Delta(\mu) = (\mu+1)(\mu-3)$. Essa função representa uma parábola com concavidade para cima e, por isso, tem valores positivos se $\mu < -1$ ou $\mu > 3$. Para $-1 < \mu < 3$, a função $\Delta(\mu)$ tem valores negativos. Vamos analisar três casos separadamente:

Caso I: $\mu < -1$. Nesse caso, $\Delta > 0$ e, portanto, λ_1 e λ_2 são números reais. Como $\mu < -1$, temos $-4(\mu+1) > 0$ e, portanto, $\Delta(\mu) = (\mu+1)^2 - 4(\mu+1) > (\mu+1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta(\mu)} > |\mu+1|$. Logo, $\lambda_1 = \frac{1+\mu}{2} + \frac{\sqrt{\Delta(\mu)}}{2} > 0$ e $\lambda_2 = \frac{1+\mu}{2} - \frac{\sqrt{\Delta(\mu)}}{2} < 0$. Isso significa que o ponto de equilíbrio é instável (ponto de sela) nesse caso.

Caso II: $-1 < \mu < 3$. Nesse caso, $\Delta < 0$ e, portanto, λ_1 e λ_2 são números complexos. Logo, $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2)\frac{1+\mu}{2} > 0$. Isso significa que o ponto de equilíbrio é instável (espiral) nesse caso.

Caso III: $\mu > 3$. Nesse caso, $\Delta > 0$ e, portanto, λ_1 e λ_2 são números reais. Como $\mu > 3$, temos $-4(\mu+1) < 0$ e, portanto, $\Delta(\mu) = (\mu+1)^2 - 4(\mu+1) < (\mu+1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta(\mu)} < \mu+1$. Logo, $\lambda_1 = \frac{1+\mu}{2} + \frac{\sqrt{\Delta(\mu)}}{2} > 0$ e $\lambda_2 = \frac{1+\mu}{2} - \frac{\sqrt{\Delta(\mu)}}{2} > 0$. Isso significa que o ponto de equilíbrio é instável (nó) nesse caso.

Como $\mu < -1$, temos $-4(\mu+1) > 0$ e, portanto, $\Delta(\mu) = (\mu+1)^2 - 4(\mu+1) > (\mu+1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta(\mu)} > |\mu+1|$. Logo, $\lambda_1 = \frac{1+\mu}{2} + \frac{\sqrt{\Delta(\mu)}}{2} > 0$ e $\lambda_2 = \frac{1+\mu}{2} - \frac{\sqrt{\Delta(\mu)}}{2} < 0$. Isso significa que o ponto de equilíbrio é instável (ponto de sela) nesse caso.

Resumindo: as bifurcações ocorrem quando $\Delta(\mu) = 0$, isto é, quando $\mu = -1$ ou quando $\mu = 3$. Para $\mu < -1$, o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é um ponto de sela. Para $-1 < \mu < 3$, o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é uma espiral instável. Para $\mu > 3$, o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é um nó instável.