

## Lista 2 - Introdução à Probabilidade e Estatística

### Modelo Probabilístico

**1** — Uma urna contém 3 bolas, uma vermelha, uma verde e uma azul.

- Considere o seguinte experimento. Retire uma bola da urna, devolva-a e retire uma segunda bola. Descreva o espaço amostral.
- Repita o exercício no caso em que a primeira bola retirada não é devolvida.

**2** — Proponha o espaço amostral para os seguintes experimentos

- Uma moeda é lançada duas vezes.
- Um dado e uma moeda são lançados simultaneamente
- Uma caneca cai de uma mesa.
- Duas cartas são retiradas de um baralho de 52 cartas.
- Um pacote de seis cartas numeradas é embaralhado e os números são revelados um a um.
- Lançar uma moeda até sair cara.
- Que horas seu relógio mostra agora.

**3** — Dois dados são lançados. Seja  $E$  o evento em que a soma dos dados é ímpar; seja  $F$  o evento em que pelo menos um dos números na face virada para cima seja 1; e seja  $G$  o evento em que a soma é 5. Descreva os eventos  $E \cap F$ ,  $E \cup F$ ,  $F \cap$

$G$ ,  $E \cap F^C$ , e  $E \cap F \cap G$ .

**4** — Um dado é lançado sucessivas vezes até aparecer um 6 na face virada para cima. Neste instante o experimento finaliza. Qual é o espaço amostral deste experimento? Seja  $E_n$  o evento em que  $n$  lançamentos são necessários para completar o experimento. Que evento representa  $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^C$ ?

**5** — Um sistema está formado por 5 componentes, cada uma das quais está em funcionamento ou com falha. Considere o experimento que consiste em observar o estado de cada componente. Assuma que o resultado do experimento está dado por um vetor  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ , onde  $x_i$  é igual a 1 se a  $i$ -ésima componente está funcionando e igual a 0 caso contrário.

- Qual a cardinalidade do espaço amostral deste experimento.
- Assuma que o sistema estará em funcionamento caso as componentes 1 e 2 estejam funcionando, ou se as componentes 3 e 4 estão funcionando ou se as componentes 1, 3 e 5 estão funcionando. Seja  $W$  o evento em que o sistema está funcionando. Especifique os pontos amostrais de  $W$ .
- Seja  $A$  o evento em que as componentes 4 e 5 falham. Qual a cardinalidade deste evento?
- Escreva todos os pontos amostrais do

evento  $A \cap W$ .

**6** — O administrador de um hospital codifica os pacientes vítimas de arma de fogo que ingresam na unidade hospitalar segundo tenham ou não plano de saúde (código 1 se tem cobertura e código 0 se não tiver) e de acordo a sua condição, que é avaliada como boa (b), razoável (r) ou péssima (p). Considere o experimento que consiste em codificar estes pacientes.

- a) Descreva o espaço amostral deste experimento.
- b) Seja  $A$  o evento em que o paciente está em uma condição péssima. Especifique os pontos amostrais de  $A$ .
- c) Seja  $B$  o evento em que o paciente não tem um plano de saúde. Especifique os pontos amostrais de  $B$ .
- d) Apresente todos os pontos amostrais do evento  $B^C \cup A$ .

**7** — *Distribuição de objetos em cubículos.* Considere a estrutura do espaço amostral decorrente de alocar  $k$  objetos (bolas, etc.) em  $n$  cubículos (caixas, etc.) enumerados de 1 a  $n$ . Esta classe de problemas aparece, por exemplo, na Física Estatística quando é estudada a distribuição de  $k$  partículas (prótons, elétrons, etc.) entre  $n$  estados (que podem ser níveis de energia). Na física estatística dizemos que:

- as partículas distinguíveis e que não estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Maxwell-Boltzmann
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Bose-Einstein.
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão, dizemos que obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac.

Descreva o espaço amostral para estes modelos de alocação de partículas.

**8** — Considere o experimento aleatório que consiste em observar os primeiros  $n$  movimentos de uma partícula que se desloca aleatoriamente no conjunto  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  dos números inteiros. A partícula começa sua trajetória na origem no instante 0 e a cada instante de tempo 1, 2, 3, ... a partícula se move aleatoriamente para a direita ou para a esquerda. Descreva o espaço amostral deste experimento.

**9** — Descreva o espaço amostral quando o experimento consiste em observar a trajetória completa do passeio aleatório. Isto é, se observarmos seus movimentos em todos instante de tempo  $n, n \in \mathbb{N}$ .

**10** — Considere uma urna que contém  $M$  bolas enumeradas 1, 2, ...  $M$  onde  $M_1$  bolas tem a cor  $b_1, \dots, M_r$  tem a cor  $b_r$ , e  $M_1 + \dots + M_r = M$ . Suponha que retiramos uma amostra de tamanho  $n < M$  sem substituição. Descreva o espaço amostral do experimento.

**11** — Mostre as seguintes relações

- a)  $E \cap F \subset E \subset E \cup F$ .
- b) Se  $E \subset F$  então  $F^C \subset E^C$ .
- c)  $F = (F \cap E) \cup F \cap E^C$ , e  $E \cup F = E \cup (E^C \cap F)$ .
- d) Para qualquer sequência de eventos  $E_1, E_2, \dots$  defina uma sequência de eventos  $F_1, F_2, \dots$  disjuntos dois a dois tais que para cada  $n \geq 1$ ,

$$\cup_{i=1}^n E_i = \cup_{i=1}^n F_i.$$

**12** — Sejam  $E, F$  e  $G$  três eventos. Encontre uma expressão para os seguintes eventos

- a) Apenas o evento  $E$  ocorre.
- b) Os eventos  $E$  e  $G$  ocorrem mas não o evento  $F$ .
- c) Pelo menos um dos eventos ocorre.
- d) Pelo menos dois dos eventos ocorrem.
- e) Os três eventos ocorrem.
- f) Nenhum dos eventos ocorre.
- g) No máximo, um dos eventos ocorre.
- h) No máximo, dois dos eventos ocorrem.
- i) Exatamente dois dos eventos ocorrem.
- j) No máximo, três dos eventos ocorrem.

**13** — Suponha que um experimento é realizado  $n$  vezes. Para qualquer evento  $E$  do espaço amostral seja  $n(E)$  o número de vezes que o evento  $E$  ocorre, e defina  $f(E) = n(E)/n$ . Mostre que  $f(\cdot)$  satisfaz os axiomas de uma probabilidade.

**14** — Se  $\mathbb{P}[E] = 0,9$  e  $\mathbb{P}[F] = 0,8$  mostre que  $\mathbb{P}[E \cap F] \geq 0,7$ . Em geral, mostre a desigualdade de Bonferroni,

$$\mathbb{P}[E \cap F] \geq \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - 1$$

**15** — Mostre que a probabilidade de que exatamente um dos eventos  $E$  ou  $F$  ocorra é igual a  $\mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - 2\mathbb{P}[E \cap F]$ .

**16** — Prove que  $\mathbb{P}[E \cap F^C] = \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[E \cap F]$ .

**17** — Mostre que  $A \subset B$  se e somente se  $1_A \leq 1_B$ ; e que  $A \cap B = \emptyset$  se, e somente se,  $1_A 1_B = 0$ .

**18** — Mostre que se  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$  são duas probabilidades então  $a\mathbb{P} + b\mathbb{Q}$  é uma probabilidade, onde  $a, b \geq 0$  e  $a + b = 1$ . Forneça um exemplo concreto de uma mistura deste tipo.

**19** — Se  $\mathbb{P}$  é uma probabilidade, que axiomas satisfazem  $\mathbb{P}/2$  e  $\mathbb{P}^2$ .

**20** — Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de eventos.

- a) Mostre que se  $\mathbb{P}[A_n] = 1, \forall n \in \mathbb{N}$  então  $\mathbb{P}[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n] = 1$ .
- b) Mostre que se  $\mathbb{P}[A_n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}$  então  $\mathbb{P}[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n] = 0$ .

\* **21** — Mostre que  $\mathbb{P}[E \cup F \cup G] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] + \mathbb{P}[G] - \mathbb{P}[E^C \cap F \cap G] - \mathbb{P}[E \cap F^C \cap G] - \mathbb{P}[E \cap F \cap G^C] - 2\mathbb{P}[E \cap F \cap G]$ .

# Respostas dos Exercícios

1 Se denotarmos uma bola vermelha por  $Va$ , uma verde por  $Ve$  e uma azul por  $A$  teremos que o espaço amostral será dado por:

- a)  $\Omega = \{(Va, Va), (Va, Ve), (Va, A), (Ve, Va), (Ve, Ve), (Ve, A), (A, Va), (A, Ve), (A, A)\}$   
 b)  $\Omega = \{(Va, Ve), (Va, A), (Ve, Va), (Ve, A), (A, Va), (A, Ve)\}$

2 a)  $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ , onde 0 representa coroa e 1 representa cara.

b)  $\Omega = \{(i, a) : i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, a \in \{0, 1\}\}$ .

c) Há várias opções dependendo de qual seja o interesse de quem esteja observando o experimento.

i)  $\Omega = \{S, N\}$  onde  $S$  representa que a caneca quebrou e  $N$  representa que a caneca não quebrou.

ii)  $\Omega = \{1, 2, \dots\}$  se o interesse for em registrar o número de partes da caneca espalhados no chão após a queda.

iii)  $\Omega = \{A, B, D, E\}$  se o interesse for em saber se após a queda a caneca ficou virada para Acima ou para Baixo; ou se a orelha da caneca ficou para Direita ou para Esquerda.

d) Se  $C$  denota o conjunto de cartas, então  $\Omega = \{A : A \subset C \text{ e } |A| = 2\}$ . Em outras palavras,  $\Omega$  consiste de todos os subconjuntos de duas cartas de um baralho de 52 cartas.

e) O espaço amostral consiste de todas as permutações do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

f) Se registrarmos o número de lançamentos necessários até sair cara,  $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ .

g) Se o relógio for um digital podemos tomar como espaço amostral  $\Omega = \{(h, m, s) : h \in \Omega_h, m \in \Omega_m, s \in \Omega_s\}$ , onde  $\Omega_h = \{1, 2, \dots, 24\}$ ,  $\Omega_m = \{0, 1, \dots, 59\}$  e  $\Omega_s = \{0, 1, \dots, 59\}$ .

3 O espaço amostral corresponde a este experimento é  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\} = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i = 1, 2\}$ . Desta forma temos que

i)  $E \cap F = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1)\}$ .

ii)  $E \cup F$  representa o evento em que a soma é ímpar ou pelo menos um dos dois números sorteados é o número 1.

iii)  $F \cap G = \{(1, 4), (4, 1)\}$ .

iv)  $E \cap F^C = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)\}$ .

v)  $E \cap F \cap G = F \cap G$ .

4 Uma escolha de espaço amostral é dada por  $\Omega = \{(n, x_1, \dots, x_{n-1}), n \geq 2, x_i \neq 6, i = 1, \dots, n-1\} \cup \{1\}$  onde  $(n, x_1, \dots, x_{n-1})$  representa a situação em que o número 6 foi sorteado pela primeira vez no  $n$ -ésimo lançamento e  $x_i$  representa o resultado do  $i$ -ésimo lançamento. O evento  $\{1\}$  representa o evento no qual o número 6 é sorteado no primeiro lançamento.

O evento  $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^C$  representa o evento em que o número 6 nunca é sorteado.

5 a)  $2^5 = 32$ .

b)  $W = \{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1)\}$ .

c) 8.

d)  $A \cap W = \{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0)\}$ .

6 a)  $\Omega = \{(1, b), (0, b), (1, r), (0, r), (1, p), (0, p)\}$ .

b)  $A = \{(1, p), (0, p)\}$ .

c)  $B = \{(0, b), (0, r), (0, p)\}$ .

d)  $B^C \cup A = \{(1, p), (0, p), (1, b), (1, r)\}$ .

7 *Modelo de Maxwell-Boltzman.* Neste modelo de alocação de partículas em cubículos as partículas são distinguíveis e um cubículo pode comportar mais de uma partícula. Nestas condições o espaço amostral para este experimento é dado por  $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : 1 \leq \omega_i \leq n \forall i\}$ , onde  $\omega_i$  é o número do cubículo onde a  $i$ -ésima partícula é alocada. Note que  $|\Omega| = n^k$ .

*Modelo de Fermi-Dirac.* Neste modelo as partículas são consideradas indistinguíveis e

ocupação múltipla de cubículos não é permitida. Neste caso,  $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i = 0 \text{ ou } \forall j \text{ e } \sum_{j=1}^n \omega_j = k\}$ . Note que  $|\Omega| = \binom{n}{k}$ .

*Modelo de Bose-Einstein.* Neste modelo as partículas são indistinguíveis e ocupação múltipla dos cubículos é permitida. Neste caso,  $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n \omega_j = k\}$ , onde  $\omega_j$  representa o número de partículas presentes no cubículo  $j$ . Note que  $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k-1}$ .

**8**  $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{-1, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$  onde  $\omega_i = -1$  representa um passo à esquerda no  $i$ -ésimo movimento e  $\omega_i = 1$  representa um passo à direita no  $i$ -ésimo movimento.

**9**  $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} : \omega_i = -1 \text{ ou } 1, i \in \mathbb{N}\}$ .

**10**  $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \dots, a_n) : a_k \neq a_l \text{ se } k \neq l, a_i = 1, 2, \dots, M\}$ . Note que  $|\Omega| = (M)_m$ .

**11** d)  $F_1 = E_1$  e  $F_i = E_i \cap (\cap_{j=1}^{i-1} E_j^c)$  para  $i \geq 2$ .

**12** a)  $E \cap F^c \cap G^c$ .

b)  $E \cap G \cap F^c$ .

c)  $E \cup F \cup G$ .

d)  $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$ .

e)  $E \cap F \cap G$ .

f)  $E^c \cap F^c \cap G^c$ .

g)  $(E^c \cap F^c \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G^c) \cup (E^c \cap F \cap G^c) \cup (E^c \cap F^c \cap G)$

h)  $(E \cap F \cap G)^c$ .

i)  $(E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G) \cup (E^c \cap F \cap G)$ .

j)  $\Omega$ .

**13**  $f(\cdot)$  satisfaz as seguintes propriedades:

i)  $f(E) \geq 0$  para qualquer evento  $E$  já que  $n(E) \geq 0$ .

ii) Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $f(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{n(A) + n(B)}{n} = f(A) + f(B)$ .

iii)  $f(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$ .

**14** Sendo que  $1 \geq \mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$  concluimos que  $\mathbb{P}[E \cap F] \geq \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - 1$ .

**15** O evento  $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$  representa o evento em que só um dos eventos  $E$  ou  $F$  ocorre. Logo,  $\mathbb{P}[E \Delta F] = \mathbb{P}[E \setminus F] + \mathbb{P}[F \setminus E] = \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[E \cap F] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$ .

**16** Sendo que  $E \cap F^c = E \setminus (E \cap F)$  e que  $E \cap F \subset E$  concluimos que,  $\mathbb{P}[E \cap F^c] = \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[E \cap F]$ .

**17** Assuma que  $A \subset B$ . Seja  $\omega \in \Omega$ . Tem-se três casos.

i) Se  $\omega \in A$  então  $\omega \in B$  e neste caso tem-se que  $1_A(\omega) = 1_B(\omega) = 1$ .

ii) Se  $\omega \in B \setminus A$  então  $1_A(\omega) = 0 < 1 = 1_B(\omega)$ .

iii) Se  $\omega \in B^c$  então  $1_A(\omega) = 1_B(\omega) = 0$ .

Concluimos que  $1_A \leq 1_B$ .

Agora assumamos que  $1_A \leq 1_B$ . Seja  $\omega \in A$ . Logo,  $1 = 1_A(\omega) \leq 1_B(\omega) \leq 1$ . Portanto  $1_B(\omega) = 1$ ; ou, de forma equivalente,  $\omega \in B$ .

**18** Começamos notando que para qualquer evento  $E$ ,  $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(E) = a\mathbb{P}(E) + b\mathbb{Q}(E)$ . Logo,

i) Do fato que  $\mathbb{P}(E), \mathbb{Q}(E) \geq 0$  para qualquer evento  $E$  segue-se que  $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(E) \geq 0$ .

ii) Se  $E, F$  são dois eventos disjuntos temos que  $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(E \cup F) = a\mathbb{P}(E \cup F) + b\mathbb{Q}(E \cup F) = a(\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)) + b(\mathbb{Q}(E) + \mathbb{Q}(F)) = (a\mathbb{P}(E) + b\mathbb{Q}(E)) + (a\mathbb{P}(F) + b\mathbb{Q}(F))$ .

iii)  $(a\mathbb{P} + b\mathbb{Q})(\Omega) = a\mathbb{P}(\Omega) + b\mathbb{Q}(\Omega) = a \cdot 1 + b \cdot 1 = 1$ .

**19**  $\mathbb{P}/2$  satisfaz os axiomas  $i$  e  $ii$  já que

i)  $\mathbb{P}/2(E) = \frac{\mathbb{P}(E)}{2} \geq 0$  para qualquer evento  $E$  e,

ii) se  $E, F$  são dois eventos disjuntos então  $\mathbb{P}/2(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup F)/2 = \frac{\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)}{2} = \mathbb{P}/2(E) + \mathbb{P}/2(F)$ .

$\mathbb{P}^2$  satisfaz os axiomas  $i$  e  $iii$  já que

i)  $\mathbb{P}^2(E) \geq 0$  para qualquer evento  $E$  e

iii)  $\mathbb{P}^2(\Omega) = 1^2 = 1$ .

**20** Assuma que  $\mathbb{P}(A_n) = 0$  para qualquer  $n$ . Sendo que  $0 \leq \mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 0$  concluimos que  $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$ .

Para concluir o exercício note que  $\mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1 - \mathbb{P}((\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)^c) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c)$  e que se  $\mathbb{P}(A_n) = 1$  para todo  $n$  então  $\mathbb{P}(A_n^c) = 0$  para todo  $n$ .

**21** Verifique que  $E \cup F \cup G = A \cup B \cup C$  com  $A, B, C$  disjuntos dois a dois onde  $A = E \setminus ((E \cap F^c \cap G) \cup (E \cap F \cap G))$ ,  $B = F \setminus ((E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F \cap G))$  e  $C = G \setminus (G \cap F \cap E^c)$ . Logo aplique as propriedades de uma probabilidade.

**Outra solução:**

Pelo Princípio de Inclusão exclusiva:

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G)$$

Agora use que

$$E \cap F = (E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F \cap G)$$

$$E \cap G = (E \cap G \cap F^c) \cup (E \cap G \cap F)$$

$$F \cap G = (F \cap G \cap E^c) \cup (F \cap G \cap E).$$

e assim

$$P(E \cap F) = P(E \cap F \cap G^c) + P(E \cap F \cap G)$$

$$P(E \cap G) = P(E \cap G \cap F^c) + P(E \cap G \cap F)$$

$$P(F \cap G) = P(F \cap G \cap E^c) + P(F \cap G \cap E).$$

Somando

$$P(E \cap F) + P(E \cap G) + P(F \cap G) =$$

$$P(E \cap F \cap G^c) + P(E \cap F \cap F^c) + P(F \cap G \cap E^c) + 3P(E \cap F \cap G),$$

Agora substitua na fórmula de inclusão exclusiva.