

## Lista 3 - Introdução à Probabilidade e Estatística

### Probabilidade em Espaços Equiprováveis

**1** — Num evento científico temos 15 físicos e 11 matemáticos. Três deles serão escolhidos aleatoriamente para participar de uma mesa redonda.

- Qual a chance que sejam todos físicos?
- Qual a chance que pelo menos um seja matemático?
- Qual a chance que exatamente dois sejam matemáticos?

**2** — Um dado vermelho e um branco são jogados, qual a probabilidade que o resultado do dado vermelho seja maior que a do branco?

**3** — Qual a probabilidade de tirarmos 4 números distintos jogando 4 dados.

**4** — Se 1 moeda for jogada 7 vezes.

- Qual a probabilidade que não saia nenhuma cara?
- Qual a probabilidade que saia 3 caras?
- Qual a probabilidade que saia pelo menos 3 caras?

**5** — Um professor quer separar seus 10 alunos em dois grupos de 5 e resolveu fazer isso através de um sorteio. Dois alunos gostariam de ficar no mesmo grupo. Qual a probabilidade que isso ocorra?

**6** — Suponha que  $A$  e  $B$  são eventos mutuamente excludentes tais que  $\mathbb{P}[A] = 0,3$  e  $\mathbb{P}[B] = 0,5$ . Calcule a probabilidade de que

- ocorra pelo menos um dos dois eventos;
- ocorra  $A$  mas não ocorra  $B$ ;
- ambos eventos ocorram.

**7** — Assumindo que todas as  $\binom{52}{5}$  mãos de pôquer são igualmente prováveis, qual a probabilidade de sair

- um flush? (Uma mão é chamada flush se as 5 cartas forem do mesmo naipe.)
- um par? (duas cartas do mesmo valor.)
- dois pares?
- uma trinca? (três cartas do mesmo valor e as duas restantes não formam um par.)
- uma quadra? (quatro cartas do mesmo valor.)

**8** — Se 8 torres são distribuídas aleatoriamente em um tabuleiro de xadrez calcule a probabilidade de que nenhuma das torres possa capturar qualquer uma das outras torres.

**9** — (Blackjack) Duas cartas são escolhidas ao acaso de um baralho (de pôquer). Qual a probabilidade de sair um Ás e uma carta de 10 pontos (valetes, damas, reis e 10.)?

**10** — Uma pequena aldeia está formada por 20 famílias, das quais 4 têm um filho, 8 têm 2 filhos, 5 têm 3 filhos, 2 têm 4 filhos e 1 tem 5 filhos.

- Se uma família é escolhida ao acaso qual a probabilidade de que tenha  $i$  filhos,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ?

- b) Se uma das crianças é escolhida ao acaso qual a probabilidade dela vir de uma família com  $i$  crianças,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ?

**11** — Se dois dados são lançados, qual a probabilidade de que a soma das faces viradas para cima seja  $i$ ?

**12** — Dois dados são lançados até que a soma seja 5 ou 7. Calcule a probabilidade de que o 5 ocorra primeiro. Dica: Seja  $E_n$  o evento em que a soma seja 5 e não tenha ocorrido um 5 ou 7 nos  $n-1$  primeiros lançamentos. Calcule  $\mathbb{P}[E_n]$  e argumente que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n]$  é a probabilidade a ser calculada.

**13** — Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 7 bolas negras. Os jogadores  $A$  e  $B$  retiram uma bola por vez (sem substituição) até sair uma bola vermelha pela primeira vez. Calcule a probabilidade de que o jogador  $A$  escolha primeiro a bola vermelha.

**14** — Uma urna contém  $n$  bolas brancas e  $m$  bolas negras, onde  $n$  e  $m$  são números inteiros positivos.

- Se duas bolas são escolhidas ao acaso, qual a probabilidade delas serem da mesma cor?
- Se uma bola é escolhida ao acaso e é recolocada dentro da urna antes da segunda bola ser escolhida, qual a probabilidade de que as bolas escolhidas sejam da mesma cor?
- Mostre que a probabilidade encontrada em  $b)$  é maior que a probabilidade encontrada em  $a)$ .

**15** — Um professor seleciona 10 problemas e informa a sala que o exame final consistirá em 5 exercícios escolhidos ao acaso desta lista de problemas. Se  $m$  estudante sabe fazer 7 dos 10 problemas qual a probabilidade de responder corretamente

- os 5 problemas;
- pelo menos 4 dos problemas?

**16** — Dois dados são lançados em sequência  $n$  vezes. Calcule a probabilidade de que dois 6 apareçam no mesmo lançamento pelo menos uma vez. Estime o valor de  $n$  para que esta probabilidade seja pelo menos  $\frac{1}{2}$ .

**17** —

- Se  $N$  pessoas, incluindo  $A$  e  $B$ , são dispostas ao acaso em uma fileira, qual a probabilidade de que  $A$  e  $B$  estejam um do lado do outro?
- Calcule a probabilidade do enunciado anterior quando as pessoas são dispostas em uma roda.

**18** — Um professor possui um chaveiro com 15 chaves. Se consideramos que ele escolhe as chaves de modo aleatório.

- Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de 7 tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de 7 tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de  $k$  tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de  $k$  tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta na  $7^{\text{a}}$  tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta na  $7^{\text{a}}$  tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?

**19** — Uma mulher tem  $n$  chaves das quais uma abrirá a porta do seu carro.

- Se escolhe as chaves ao acaso, desconsiderando as chaves que não abrem o carro, qual a probabilidade de que conseguirá abrir o carro na  $k$ -ésima tentativa?
- Qual essa probabilidade se ela não desconsi-

derar as chaves já retiradas?

**20** — Se há 12 pessoas desconhecidas em uma sala, qual a probabilidade de nenhum par de pessoas faça aniversário no mesmo mês?

**21** — Um grupo de 6 homens e 6 mulheres é dividido ao acaso em dois grupos iguais. Qual a pro-

babibilidade de que ambos grupos tenham o mesmo número de homens?

**22** — Calcule a probabilidade de que uma mão de 13 cartas contenha

- a) um ás e um rei de cada naipe;
- b) pelo menos um grupo de quatro cartas do mesmo valor dos treze valores possíveis?

## Respostas dos Exercícios

1 a.)  $\frac{\binom{15}{3}}{\binom{26}{3}} = \frac{7}{40}$  b.)  $1 - \frac{7}{40} = \frac{33}{40}$  c.)  $\frac{\binom{11}{2}\binom{15}{1}}{\binom{26}{3}}$

4 a.)  $P = \frac{1}{2^7} = 1/128$

b.)  $P = \binom{7}{3} \frac{1}{2^7} = 35/128$

c.)  $P = \binom{7}{3} \frac{1}{2^7} + \binom{7}{4} \frac{1}{2^7} + \binom{7}{5} \frac{1}{2^7} + \binom{7}{6} \frac{1}{2^7} + \binom{7}{7} \frac{1}{2^7} = 99/128$

5  $P = \frac{\binom{8}{5}\binom{3}{5}}{\binom{10}{5}\binom{5}{5}} = \frac{2}{9}$

6 a.) 0,8 b.) 0,3 c.) 0

7 a.) Dica: Faça primeiramente a escolha do naipe e depois do valor das cartas.

$4\binom{13}{5}/\binom{52}{5}$

b.)  $(13\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1})^3/\binom{52}{5} \approx 0,42$  c.)  $\approx 0,047$  d.)  $\approx 0,021$  e.)  $(\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1})/\binom{52}{5}$

8  $P = \frac{8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2}{(64)(63)(62)(61)(60)(59)(58)(57)}$

9  $P = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} \frac{32}{663}}{\binom{52}{2}}$

10 a.)  $P(\text{família tem } i \text{ filhos}) = \frac{n_i}{20}$

b.)  $P(\text{criança vir de família que tem } i \text{ filhos}) = \frac{i \cdot n_i}{48}$

11

$i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

12 a.) Dica: Use o exercício anterior. E veja que para que ocorra  $E_n$  não ocorreu 5 ou 7  $n - 1$  vezes e finalmente ocorreu 5. Assim

$P(E_n) = \frac{26^{n-1} \cdot 4}{35^n}$ .

b.) Como os  $E_n$  são mutuamente excludentes

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Agora use a fórmula para a soma de uma P.G chegando à  $P = 2/5$

OBS: A soma de infinitos termos de uma P.G. é

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_0 r^i = \frac{a_0}{1-r}$$

(por que?)

13  $P_i = P[\text{tirar a bola vermelha na } i\text{-ésima retirada.}]$

$P_1 = 3/10$

$P_3 = \frac{7}{10} \frac{6}{9} \frac{3}{8}$

$P_5 = \frac{7}{10} \frac{6}{9} \frac{5}{8} \frac{4}{7} \frac{3}{6}$

$P_6 = \frac{7}{10} \frac{6}{9} \frac{5}{8} \frac{4}{7} \frac{3}{6} \frac{2}{5} \frac{3}{4}$

$P = 7/12$

14 a.)  $P = \frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$   
 b.)  $P = \frac{n \cdot n + m \cdot m}{(n+m)(n+m)}$

15 a.)  $1/2$   
 b.)  $P = \frac{\binom{7}{5} + \binom{7}{4} \binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} = 5/12$

16 Seja  $E_n^c$  o evento de não ocorrência de 6 em ambos os dados. Então  $\mathbb{P}(E_n^c) = \frac{35^n}{36^n}$   
 Logo  $\mathbb{P}(E_n) = 1 - \frac{35^n}{36^n}$  logo  $n \geq 25$

17 a.) Dica: Dois casos A antes do B e B antes do A.  
 Caso A antes do B. Nesse caso temos  $N - 1$  modos de escolher a posição do A;  
 O outro caso é análogo:  
 $2(N - 1)!/N! = 2/N$   
 b.) Numa roda existem  $(N - 1)!$  modos de ordenar as pessoas. Use raciocínio análogo ao item a.  
 $P = 2(N - 2)!/(N - 1)! = 2/(N - 1)$

18 a.)  $2/5$   
 b.)  $\frac{14}{15} \left(1 - \left(\frac{14}{15}\right)^6\right)$   
 c.)  $1/15$  (veja o próximo problema) d.)  $\frac{14^{k-1}}{15^k}$

19 a.)  $P[N = k] = (1 - 1/n)(1 - 1/(n - 1))(1 - 1/(n - 2)) \cdots (1 - 1/(n - (k - 1))) = 1/n$

b.)  $P[N = k] = (1 - 1/n)^{k-1} 1/n$

(Obs: é uma geométrica com  $p=1/n$ )

20  $P = \frac{12!}{12^{12}}$

21  $P = \frac{\binom{6}{3} \binom{6}{3}}{\binom{12}{6}}$

22 a.)  $11/6431950$   
 b.)  $143/4165$