Lista 6 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Variáveis Aleatórias Contínuas

1 — Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{se } -1 < X < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual é o valor de c?

b) Qual é a função distribuição acumulada de X?

2 — Um sistema formado por uma peça origina1 mais uma sobressalente pode funcionar por uma quantidade de tempo aleatória X. Se a densidade de X é dada, em unidades de meses, por

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-x/2} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

qual é a probabilidade de que o sistema funcione por pelo menos 5 meses?

3 — Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} C(2x-x^3) & \text{se } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Poderia f ser uma função densidade de probabilidade? Caso positivo, determine C. Repita considerando que a função f seja dada por

$$f(x) = \begin{cases} C(2x-x^2) & \text{se } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

4 — A função densidade de probabilidade de X, que representa a vida útil de certo tipo de equipamento eletrônico, é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{se } x > 10 \\ 0 & \text{se } x \leq 10. \end{cases}$$

a) Determine $\mathbb{P}((X > 20)$

b) Qual é função distribuição acumulada de X?

c) Qual é a probabilidade de que, de 6 componentes como esse, pelo menos 3 funcionem por pelo menos 15 horas? Que suposições você está fazendo?

5 — Um posto de gasolina é abastecido com gasolina uma vez por semana. Se o volume semanal de vendas em milhares de litros é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

qual deve ser a capacidade do tanque para que a probabilidade do fornecimento não ser suficiente em uma dada semana seja de $0,01$?

6 — Calcule $\mathbb{E}[X]$ se X tem uma função de densidade dada por

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^2} & \text{se } x > 5 \\ 0 & \text{se } x \leq 5 \end{cases}$$

7 — O tempo de vida, medido em horas, de uma válvula eletrônica é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o tempo de vida esperado dessa válvula.

8 — Trens em direção ao destino A chegam na estação em intervalos de 15 minutos a partir das $7:00$ da manhã, enquanto trens em direção ao destino B chegam à estação em intervalos de 15 minutos começando as $7:05$ da manhã.

a) Se certo passageiro chega à estação em um horário uniformemente distribuído entre $7:00$ e $8:00$ da manhã e pega o primeiro trem que chega, em que proporção de tempo ele vai para o destino A?

b) E se o passageiro chegar em um horário uniformemente distribuído entre $7:10$ e $8:10$ da manhã?

9 — Você chega na parada de ônibus as $10:00$, sabendo que o ônibus chegará em algum horário uniformemente distribuído entre $10:OO$ e $10:30$.

a) Qual é a probabilidade de que você tenha que esperar mais de 10 minutos?

b) Se, as $10:15$, o ônibus ainda não tiver chegado, qual é a probabilidade de que você tenha que esperar pelo menos mais 10 minutos?

10 — Se Y tem distribuição uniforme no intervalo $(0,5)$, qual a probabilidade de que as raízes do polinômio $p(x) = 4x^2 + 4xY + Y + 2$ sejam ambas reais?

11 — Se X é uma variável aleatória normal com parâmetros $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 36$, calcule
$\mathbb{P}((X > 5)$,
$\mathbb{P}((4 < X < 16)$,
$\mathbb{P}((X < 8)$,
$\mathbb{P}((X < 20)$ e
$\mathbb{P}((X > 16)$.

12 — O volume anual de chuvas (em mm) em certa região é normalmente distribuído com $\mu = 40$ e $\sigma = 4$. Qual é a probabilidade de que, a contar deste ano, sejam necessários mais de 10 anos antes que o volume de chuva em um ano supere 50 mm? Que hipóteses você está adotando?

13 — Um homem praticando tiro ao alvo recebe 10 pontos se o tiro estiver a 1 cm do alvo, 5 pontos se estiver entre 1 e 3 cm do alvo, e 3 pontos se estiver entre 3 e 5 cm do alvo. Determine o número esperado de pontos que ele receberá se a distância do ponto de tiro até o alvo for uniformemente distribuída entre O e 10.

14 — Suponha que X seja uma variável aleatória normal com média $0,5$. Se $\mathbb{P}(X > 9) = 0,2$, qual é o valor de $\mathrm{Var}(X)$, aproximadamente?

15 — Seja X uma variável aleatória normal com média 12 e variância 4. Determine o valor de c tal que $\mathbb{P}((X > c) = 0,1O$.

16 — Se 65 por cento da população de uma grande comunidade são a favor de um aumento proposto para as taxas escolares, obtenha uma aproximação para a probabilidade de que uma amostra aleatória de 100 pessoas contenha

a) pelo menos 50 pessoas a favor da proposta;

b) entre 60 e 70 pessoas (inclusive) a favor;

c) menos de 75 pessoas a favor.

17 — A espessura de uma forja de duralumínio (em mm) é normalmente distribuída com $\mu = 22,86$ e $\sigma = 0,0762$. Os limites de especificação foram dados como $22,86 \pm 0,127$ mm.

a) Que percentual de forjas será defeituoso?

b) Qual é o valor máximo permissível de σ que permitirá que não exista mais de 1 forja defeituosa em 100 se as espessuras forem de $\mu = 22,86$ e σ?

18 — Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ. Defina Y por $Y = \lfloor X \rfloor + 1$, onde $\lfloor X \rfloor$ denota a parte inteira de X. Qual a distribuição de Y?

19 — Encontre a função de densidade de e^{-2X} e de $\log(X)$ onde X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro 1.

20 — Determine a densidade de $Y = |X|$, onde X tem distribuição normal padrão.

Respostas dos Exercícios

1 a) $c\int_{-1}^{1} c(1-x^2)dx = 1 \rightarrow c = 3/4$.
b) $F(x) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-x^2)dx = \frac{3}{4}(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}), -1 < x < 1$.

2 a) Como $\int xe^{-x/2}dx = -2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2}$ temos que $\int_0^\infty cxe^{-x/2}dx = 1 \rightarrow c = 1/4$.
b) $\mathbb{P}[X > 5] = \frac{1}{4}\int_5^\infty xe^{-x/2}dx = \frac{1}{4}(10e^{-5/2}4e^{-5/2} = \frac{14}{4}e^{-5/2}$.

3 a) Não.
b) Não.

4
$\mathbb{P}((X > 20) = \int_{20}^{\infty}\frac{10}{x^2}dx = 1/2$.
$F(x) = \int_{10}^{x}\frac{10}{u^2}du = 1 - \frac{10}{x}, x > 10. F(x) = 0$ para $x \leq 10$.
$\sum_{i=1}^{6}\binom{6}{i}(\frac{2}{3})^i(\frac{1}{3})^{6-i}$ como
$\mathbb{P}((X > 15) = \frac{10}{15}$. Assumimos independência dos eventos em que o tempo de funcionamento excede as 15 horas.