

## Lista 1 - Bases Matemáticas

## Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

**1** — Dê exemplos ou contra-exemplos, se existirem, para as seguintes afirmações:

- Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x + 1 > 2$ .
- Todas as letras da palavra “banana” são vogais.
- Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 < x$ .
- Para todos  $m, n \in \mathbb{N}$  pares, temos que  $n + m$  é par.

**2** — O que as seguintes afirmações significam? Elas são universais ou particulares? Elas são verdadeiras? O universo de discurso em todos os casos é os números naturais.

- $\forall x \exists y (x < y)$
- $\exists y \forall x (x < y)$
- $\exists x \forall y (x < y)$
- $\forall y \exists x (x < y)$
- $\exists x \exists y (x < y)$
- $\forall x \forall y (x < y)$

**3** — O que as seguintes afirmações significam? Elas são verdadeiras? Dê exemplos e contra-exemplos quando possível. O universo de discurso em todos os casos é os números naturais.

- $\forall x \exists y (2x - y = 0)$
- $\exists y \forall x (2x - y = 0)$
- $\exists y \exists z (y + z = 100)$

**4** — Negue as seguintes proposições:

- $3 > 4$  e  $2$  é par.
- Não é verdade que (3 é par ou que 5 é ímpar).
- 2 é um número par e  $3k + 1$  é um número ímpar.
- 2 é número par e não é verdade que 3 é um número ímpar.

- Todo elemento do conjunto  $A$  é elemento do conjunto  $B$ .
- Não é verdade que (5 é um número primo e 4 é um número ímpar).
- (Não é verdade que 5 é um número primo) ou 4 é um número ímpar.

**5** — Nas seguintes proposições abertas o domínio de discurso é o conjunto dos reais. Para essas proposições esboce na reta real o seu conjunto verdade.

- $x > 2$  e  $x < 4$
- $x > 2$  ou  $x < 3$
- $x > 2$  ou ( $x < 5$  e  $x > 3$ )
- não é verdade que ( $x > 2$  e  $x < 4$ )

**6** — Ache a contrapositiva, a recíproca e a inversa das seguintes frases:

- não  $p \Rightarrow q$ .
- não  $p \Rightarrow$  não  $q$ .
- $p \Rightarrow$  não  $q$ .
- Se chove então eu não vou trabalhar.
- Se  $x$  é par, então  $2x + 1$  é ímpar.
- Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto-serra.
- Se  $2^k + 1$  é primo, então  $k$  é uma potência de 2.
- Se  $x^2 + y^2 = 0$  então  $x$  e  $y$  são iguais a 0.

**7** — Atribua um valor verdade as seguintes proposições:

- Se 2 é par, então 3 é ímpar.
- Se 2 não é par, então 3 é ímpar.
- Se 3 não é par, então 3 não é ímpar.
- Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto-serra.

**8** — Para os pares de proposições  $p$  e  $q$  diga se  $p$  é condição necessária e/ou suficiente para  $q$ . Em todos os exemplos considere  $x$  um número natural.

- $p = \text{“}x \text{ é maior que } 2\text{”}$   $q = \text{“}x \text{ é maior que } 3\text{”}$ .
- $p = \text{“}x \text{ é maior que } 2\text{”}$   $q = \text{“}x \text{ é maior igual a } 2\text{”}$ .
- $p = \text{“}x \text{ é maior que } 0 \text{ e } x \text{ é menor que } 2\text{”}$   $q = \text{“}x \text{ é menor que } 2\text{”}$ .
- $p = \text{“}x \text{ é maior que } 0 \text{ e } x \text{ é menor que } 2\text{”}$   $q = \text{“}x = 1\text{”}$ .
- $p = \text{“}\Delta \text{ é um triângulo isósceles”}$   $q = \text{“}\Delta \text{ é um triângulo equilátero”}$ .
- $p = \text{“}M \text{ é uma matriz com determinante diferente de } 0\text{”}$   $q = \text{“}M \text{ é uma matriz invertível”}$ .

**9** — Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica:

- Existe um número real  $n$  tal que  $n^2 = 2$ .
- Não existe número racional  $x$  tal que  $x^2 = 2$ .
- Existe  $x$  tal que  $x^2$  é par e divisível por 3.
- Não existe número inteiro  $x$  tal que  $x^2$  é primo ou  $x^2$  é negativo.
- Existe um número inteiro  $x$  tal que  $x^2$  é par ou  $x^2$  é ímpar.
- Para cada número real  $x$  existe um número real  $y$  tal que  $x + y = 0$ .
- Todo elemento do conjunto  $A$  é elemento do conjunto  $B$ .
- Para todo  $\epsilon$ , existe  $\delta(\epsilon)$  tal que se  $0 < |x - a| < \delta$  então  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ .
- Todo número natural é divisível por 2, 3, 5 ou 7.
- Para todo número racional  $x$ ,  $x$  é menor que  $1/x$ .
- Se  $a$  e  $b$  são dois números primos, então  $ab$  é primo.
- Existem dois números cuja soma é 1000.
- Não existe número racional cujo quadrado é 2.
- Para todos números  $a$  e  $b$  reais, há um número  $c$  que é menor que  $b$  e maior que  $a$ .

**10** — Para cada uma das proposições anteriores, escreva a negação simbólica e “em por-

tuguês”.

**11** — Reescreva cada afirmação a seguir em língua natural, sem usar notação simbólica.

- $\forall n \in \mathbb{R}, n < n^2$ .
- $\exists n \in \mathbb{R}, n^2 = n$ .
- $\exists! n \in \mathbb{R}, n^2 = n$ .
- $\exists n \in \mathbb{R}, n^2 = n^3$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : k < n$ .
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists c, d \in \mathbb{R} : a < c + d < b$ .
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists c \in \mathbb{Z} : (a/b)c \in \mathbb{Z}$ .
- $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : \forall c \in \mathbb{R}, ab = c$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : ab = c$

**12** — A fórmula de Bhaskara é uma proposição universal. Descreva-a simbolicamente.

**13** — Para todas as afirmações a seguir  $n$  denota um número natural. Determine o conjunto verdade das seguintes proposições abertas:

- $n^2 < 12$
- $3n + 1 < 25$
- $3n + 1 < 25$  e  $n + 1 > 4$
- $n < 5$  ou  $n > 3$
- $n$  é primo e não é verdade que  $n > 17$
- $(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5) = 0$

**14** — Para cada demonstração, diga que tipo de técnica de prova foi usada, e explique como a técnica foi aplicada (o símbolo  $|$  significa “divide”):

- $a|b$  e  $a|c \rightarrow a|(b + c)$ . Prova: se  $a|b, \exists k_1 : ak_1 = b$ ; mas porque  $a|c, \exists k_2 : ak_2 = c$ . Assim,  $b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2)$ , e mostramos que  $\exists k : b + c = ak$ .  $\square$
- $\log_2 3$  é irracional. Prova: suponha que existem  $a$  e  $b$  tais que  $\log_2 3 = a/b$  com  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Então,  $2^{a/b} = 3$ , e  $(2^{a/b})^b = 3^b$ . Mas como  $(2^{a/b})^b = 2^a$ , teríamos que  $2^a = 3^b$ . Mas 2 elevado a qualquer inteiro deve ser par, e 3 elevado a qualquer inteiro deve ser ímpar. Como um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo, temos que concluir que  $\log_2 3$  é irracional.  $\square$
- Se  $a$  e  $b$  são reais e  $ab$  é irracional, então pelo menos um dentre  $a$  e  $b$  deve ser irracional. Prova: se tanto  $a$  como  $b$  forem

racionais, então há  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$  tais que  $a = k_1/k_2$  e  $b = k_3/k_4$ . Então,  $ab = (k_1/k_2)(k_3/k_4) = \frac{k_1 k_3}{k_2 k_4}$  — o que significa que  $ab$  poderia ser escrito como quociente de dois inteiros. Portanto, se  $ab$  é irracional, ou  $a$  ou  $b$  deve ser irracional.  $\square$

- d) *Se  $a$  é irracional, então  $\sqrt{a}$  também é irracional.* Prova: Se  $\sqrt{a}$  for racional, então existem inteiros  $m$  e  $n$  tais que  $\sqrt{a} = m/n$ . Elevando ambos os lados ao quadrado, temos  $a = m^2/n^2$ . Como  $m^2$  e  $n^2$  são inteiros,  $a$  é racional.  $\square$
- e) *Para qualquer triângulo retângulo não degenerado (ou seja, com todos os lados de comprimento maior que zero), sejam  $a$  e  $b$  os comprimentos de seus catetos e  $c$  o comprimento de sua hipotenusa. Então,  $a + b > c$ .* Prova: Suponha que  $a + b \leq c$ . Elevando ambos os lados ao quadrado temos  $(a + b)^2 \leq c^2$ , ou ainda,  $a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$ . Como o triângulo não é degenerado (todos os lados são maiores que zero),  $a^2 + b^2 < a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$ , e portanto  $a^2 + b^2 < c^2$ . No entanto, o Teorema de Pitágoras afirma que  $a^2 + b^2 = c^2$ , e a prova está completa.  $\square$

**15** — As demonstrações a seguir estão incorretas. Aponte o erro em cada uma delas.

- a)  $1 < 0$ . Prova: Seja um número real  $x < 1$ . Aplicando o logaritmo em ambos os lados da desigualdade, temos  $\log x < \log 1$ . Como sabemos que  $\log 1 = 0$ , então  $\log x < 0$ . Agora dividimos ambos os lados por  $\log x$  e obtemos  $1 < 0$ .  $\chi_6$
- b) *Todo número inteiro tem raiz quadrada inteira.* Prova: Provamos a contrapositiva de “ $\forall n \in \mathbb{Z}, \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ ”. Seja  $a = \sqrt{n}$ . Temos que  $a^2 = n$ , e como o quadrado de um inteiro é sempre outro inteiro,  $n$  também é inteiro.  $\chi_6$
- c) *Se  $5|ab$  então  $5|a$  ou  $5|b$ .* Prova: Se  $5|ab$  então  $ab$  é da forma  $5k$  para algum  $k$ . Portanto, ou  $a = 5m$  ou  $b = m$  para algum  $m$ . Assim, concluímos que  $5|a$  ou  $5|b$ .  $\chi_6$
- d)  $1 = 2$ . Prova: Sejam  $a$  e  $b$  dois números iguais. Multiplicando ambos os lados de “ $a = b$ ” por  $a$  obtemos  $a^2 = ab$ . Sub-

traindo  $b^2$  dos dois lados,  $a^2 - b^2 = ab - b^2$ . Fatorando,  $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ . Subtraindo  $(a - b)$  temos  $a + b = b$ . Quando  $a$  e  $b$  valem 1, temos que  $1 + 1 = 1$ , e está concluída a prova.  $\chi_6$

**16** — Demonstre as seguintes afirmações:

- a) Se  $a$  divide  $b$  e  $a$  divide  $c$  então  $a$  divide  $b + c$ .
- b) Se  $p, q$  são números racionais, então  $p + q$  é um número racional.

**17** — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições.

- a) A raiz cúbica de 2 é irracional.
- b) Dados  $a, b, c$  inteiros. Mostre que se  $a$  não divide  $bc$ , então  $a$  não divide  $b$ .

**18** — Prove cada uma das seguintes proposições pelo método contra-positivo.

- a) Se  $x$  e  $y$  são dois números inteiros cujo produto é ímpar, então ambos têm de ser ímpar.
- b) Se  $a$  e  $b$  são números reais tais que o produto  $ab$  é um número irracional, então ou  $a$  ou  $b$  deve ser um número irracional.

**19** — Mostre que o produto de um número racional não nulo com um número irracional é irracional.

**20** — Dados  $a, b, c$  números inteiros com  $c \neq 0$ . Mostre que  $a$  divide  $b$  se e somente se  $ac$  divide  $bc$ .

## Exercícios Complementares

**21** — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições.

- a) Não há soluções inteiras positivas para a equação  $x^2 - y^2 = 10$ .
- b) Não há solução racional para a equação  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$ .

# Respostas dos Exercícios

**1 a.)**Exemplos: qualquer número real maior que 1. Contra-exemplos: qualquer número real menor igual a 1. **b.)**Exemplos: letra a. Contra-exemplos: letras b,n **e.)**Exemplos  $m = 2$  e  $n = 4$  ou  $m = 6$  e  $n = 8$ . Contra-exemplos: não possui, pois como provaremos em ?? essa afirmação é verdadeira.

**2 a.)**Para todo número natural  $x$  existe um  $y$  tal que  $x < y$ . Ou seja, para qualquer número natural  $x$  existe um número natural  $y$  tal que  $y$  é maior que  $x$ . Verdadeira. Afirmação Universal. Exemplo  $x = 1$  seja  $y = 2$ . **b.)**Existe um  $y$  tal que para todo  $x$ ,  $x$  é menor que  $y$ . Afirmação particular. Afirmação falsa, pois para qualquer número natural  $y$ ,  $y + 1$  não é menor que  $y$ .

**e.)**Existem  $x$  e  $y$  tais que  $x < y$ . Afirmação particular. Verdadeira.

**3 a.)**Verdadeira. **b.)**Existe  $y$  tal que para todo  $x$ ,  $2x - y = 0$ . Falsa, pois se  $x = 0$  então  $y = 0$ , e se  $x = 1$  então  $y = 2$ . **c.)**Verdadeira.

**4 a.)** $3 \leq 4$  ou  $2$  é ímpar. **e.)**Existe um elemento no conjunto  $A$  que não é elemento do  $B$ .

**6 b.)**Contrapositiva:  $q \Rightarrow p$ . Recíproca:  $\text{não } q \Rightarrow \text{não } p$ . Inversa:  $p \Rightarrow q$ . **d.)**Contrapositiva: “Se vou trabalhar então não chove”. Recíproca: “Se não vou trabalhar então chove”. Inversa: “Se não chove então vou trabalhar”.

**7 a.)**verdadeiro **b.)**verdadeiro **c.)**falso **d.)**verdadeiro

**8 a.)**Condição necessária, mas não suficiente. **b.)**Condição suficiente, mas não necessária. **e.)**Condição necessária, mas não suficiente. **f.)**Condição necessária e suficiente.

**9 a.)** $\exists n \in \mathbb{R} | n^2 = 2$  **b.)**não  $\exists x \in \mathbb{Q} | x^2 = 2$  **f.)** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} | x + y = 0$

**10 a.)** $\forall n \in \mathbb{R} n^2 \neq 2$ . Para todo número real  $n$ ,  $n^2 \neq 2$ . **b.)** $\exists x \in \mathbb{Q} | x^2 = 2$ . Existe um número racional  $x$  tal que  $x^2 = 2$ . **f.)** $\exists x \in \mathbb{R} | \forall y \in \mathbb{R} | x + y = 0$ . Existe um número real  $x$  tal que para todo número real  $y$ ,  $x + y = 0$ .

**11 a.)**Todo número real é menor que seu quadrado. **b.)**Existe um único número real que é igual a seu próprio quadrado. **c.)**Para todo número real  $a$  existe algum outro real  $b$  tal que para qualquer  $c$  real,  $ab$  é igual a  $c$ .

**12** A fórmula diz que as soluções para  $ax^2 + bx + c = 0$  são dadas por  $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a)$ . Simbolicamente,

$$\forall a, b, c, x, (ax^2 + bx + c = 0) \\ \rightarrow \left( x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right. \\ \left. \text{ou } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

**13 a.)**{0, 1, 2, 3} **c.)**{4, 5, 6, 7} **e.)**{2, 3, 5, 7, 11, 13}

**14 d.)**A proposição provada é  $\text{nao } R(a) \rightarrow \text{nao } R(\sqrt{a})$ ; a prova apresentada é a da contrapositiva  $R(\sqrt{a}) \rightarrow R(a)$ . **e.)**Redução ao absurdo. A proposição diz que  $a + b > c$ , e a prova consiste em demonstrar que a negação da proposição, “ $a + b \leq c$ ”, leva ao absurdo.

**15 a.)**A própria demonstração diz que  $\log x < \log 1$ , portanto  $\log x < 0$ . No entanto, ao multiplicar uma inequação  $a < b$  por algum número negativo, tem-se que  $-ak > -bk$ . **b.)**A proposição provada não é a contrapositiva do que se queria provar, e sim a recíproca. **c.)**A proposição é “Se  $5|ab$  então  $5|a$  ou  $5|b$ ”, e foi usada para provar a si mesma: “ $ab$  é da forma  $5k \dots$  Portanto ou  $a = 5m$  ou  $b = m$  para algum  $m$ ”.