

## Lista 10 - Bases Matemáticas

## Sequências II

**1** — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é crescente, decrescente ou nenhuma dessas duas. Prove suas afirmações:

- a)  $a_n = n^2 + n$   
 b)  $a_n = n^2 - 7n$   
 c)  $a_n = \frac{2n - 6}{3n + 4}$   
 d)  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n + 3}$   
 e) A sequência definida recursivamente por  $a_1 = \sqrt{2}$  e  $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

**2** — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é limitada superiormente e inferiormente. Prove suas afirmações:

- a)  $a_n = n^2 + n$   
 b)  $a_n = n^2 - 7n$   
 c)  $a_n = n^2 - \frac{n}{2}$   
 d)  $a_n = \frac{1}{n^2}$   
 e)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$   
 f) A sequência definida recursivamente por  $a_1 = \sqrt{2}$  e  $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

**3** — Prove por indução que se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**4** — Calcule os seguintes limites:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{n} \right) + 2 \cos \left( \frac{1}{n} \right)$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{n} \right)}{7 + 2 \cos \left( \frac{1}{n} \right)}$   
 c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{n + 1}$   
 d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n^2}{3n^2 + 1}}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{8n^2 + n + 3}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5 + \frac{2}{n}}$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^3}{4n^4 + 3n^3}$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^9 + 3n - 2}{4n^9 + 4n^8}$

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9n^9 + 3n - 2}{4n^9 + 4n^8}}$

j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(1/6n)}{\operatorname{sen}(1/4n)}$

k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(1/7n)}{\tan(1/3n)}$

l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \left( \frac{1}{n} \right)$

m)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n - \sqrt{n^2 + 2}$

n)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^2 - 3^2}{\frac{1}{n}}$

o)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4 + \frac{1}{n}} - \sqrt{4} \right) n$

p)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4 - \frac{1}{n}} - \sqrt{4} \right) n$

**5** — Mostre usando o teorema do confronto que se  $a_n \rightarrow 0$  então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen}(a_n) = 0$$

Conclua então que se  $a_n \rightarrow 0$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(a_n) = 1$ .

**6** — Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^3)}{n^5} = 0$

**7** — Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\cos(n^2+2^n)}}{\sqrt{n}} = 0$

**8** — Usando as formulas para  $\cos(a + b)$  e  $\operatorname{sen}(a + b)$  e o exercício 5, mostre que se  $a_n \rightarrow 0$  então:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x + a_n) = \sin(x)$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(x + a_n) = \cos(x)$ .

**9** — Seja  $h \in \mathbb{R} \neq 0$ . Usando identidades trigonométricas mostre que:

- a)  $\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos(x + \frac{h}{2})$   
 b)  $\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(x + \frac{h}{2})$

**10** — Use a identidade do exercício anterior para mostrar que:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{n}) - \sin(x)}{\frac{1}{n}} = \cos(x)$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(x + \frac{1}{n}) - \cos(x)}{\frac{1}{n}} = -\sin(x)$

**11** — Mostre que se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

**12** — Mostre que se  $a_n > 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$

**13** — Calcule os seguintes limites

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + n)$   
 b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$   
 c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt[3]{3n^3 - 3}}$   
 d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^2(2n+3)^3(-n+2)}{(n+7)^4(n-8)}$   
 e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt[3]{3n^4 - 3}}$

- f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n}$   
 g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^6 + 3n^3 + 2)$   
 h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^4 + n^3 + 2n + \sqrt{n})$   
 i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{3/2} - n^{1/2})$   
 j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{2n^3 + 4})$   
 k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$   
 l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt[3]{3n^2 - 3}}$   
 m)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n + 4n + \sin(1/n)}$   
 n)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\cos(1/n) - 1}$   
 o)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n + 2}$   
 p)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n}{3n^3 + 2}$   
 q)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{43n^7 + 3n}{273n^7 + 2}$   
 r)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n + \frac{1}{n}$   
 s)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(n^2)$   
 t)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})$   
 u)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})$   
 v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}$

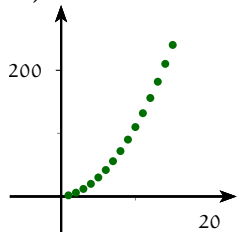
**14** — Dados dois polinômios  $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0$  e  $q(n) = b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_0$ . Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)}.$$

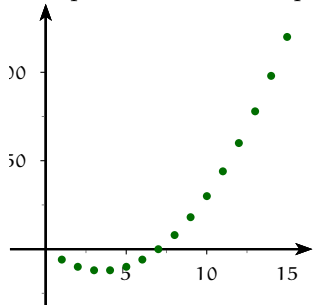
(Dica: Considere os casos  $k < m$ ,  $k > m$ ,  $k = m$ .)

# Respostas dos Exercícios

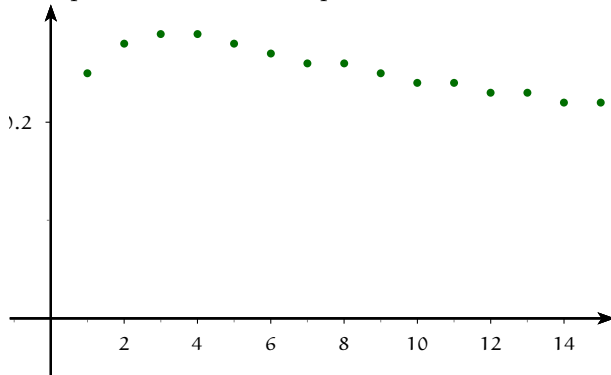
1 a.) Crescente



b.) A sequência não é crescente, nem decrescente. Essa sequência é crescente para  $n \geq 4$



c.) Crescente  
d.) A sequência não é crescente, nem decrescente. Essa sequência é decrescente para  $n \geq 3$



e.) Crescente. Dica: Demonstre por Indução.

2 a.) Ilimitada. Dica: compare com a sequência  $b_n = n$ . b.) Ilimitada. Dica: Mostre que para  $n$  suficientemente grande  $n^2 - 7n > n$ . Conclua que se  $a_n$  fosse limitada a sequência  $b_n = n$  seria limitada. c.) Ilimitada d.) Limitada. Dica: prove que  $\left| \frac{1}{n^2} \right| < 2$  para todo  $n$  e.) Limitada. Dica: prove que  $\left| \frac{(-1)^n}{n^3} \right| < 2$  para todo  $n$  f.) Limitada. Dica: prove por indução que  $|a_n| < 2$

4 a.) 2 b.)  $1/3$  c.) 3. Dica: divida  $3n + 1$  por  $n + 1$  obtendo  $3n + 1 = 3(n + 1) - 2$ . Use esse fato para simplificar o limite. d.)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ . e.) 0 f.)  $\sqrt{5}$  h.)  $\frac{2}{4}$  j.)  $\frac{2}{3}$ . Dica: limite fundamental. k.)  $\frac{3}{7}$  l.) 1. Dica: limite fundamental. m.) 0. Dica: Multiplique e divida pelo conjugado. n.) 6 o.)  $\frac{1}{4}$  p.)  $-\frac{1}{4}$

13 a.)  $\infty$  b.) 1 c.)  $\frac{2}{3^{1/3}}$  d.)  $-\infty$  e.) 0 f.) 0 g.)  $\infty$  h.)  $-\infty$  j.)  $-\infty$  k.)  $\infty$  l.)  $\infty$  m.) 0 n.)  $-\infty$  o.)  $\infty$  p.)  $\infty$  q.)  $\frac{43}{273}$  r.)  $\infty$  s.)  $\infty$  t.)  $-\infty$  u.)  $\infty$