UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 2 - Bases Matemáticas

Conjuntos I

1 — Considere o conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e sejam os seguintes subconjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \\ B &= \{x \in \mathbb{U} : (x-2)^2(x-3) = 0\} \\ C &= \{x \in \mathbb{U} : x \text{ é par}\} \end{aligned}$$

Para esses subconjuntos determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cap (B \cup C)$

c) $C \cup A^C$

d) $(A \cup C)^C$

e) $A^C \cap C^C$

f) $\wp(B)$

2 — Dados A, B, C conjuntos. Prove as seguintes afirmações

a) $A \cap A = A$

b) $A \cup A = A$

c) $A \cap B \subset B$

d) $A \subset A \cup B$

e) $A \cap B \subset A \cup B$

f) $A \cup \emptyset = A$

g) $A \cap \emptyset = \emptyset$

h) $A \cup (A \cap B) = A$

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

j) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

k) $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$

3 — Dado um conjunto $\mathbb{U}$, sejam A e B subconjuntos quaisquer de $\mathbb{U}$. Tomando o complementar relativamente a $\mathbb{U}$, mostre que:

a) $A \subset B^C$ se e somente se $A \cap B = \emptyset$

b) $A^C \cap B = B \backslash A$

c) $A \cup B^C = (B \backslash A)^C$

d) $(A^C)^C = A$

e) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

4 — Dados A, B, C, D subconjuntos. Prove as seguintes afirmações:

a) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

b) Se $A \subset B$ e $C \subset D$ então $A \cup C \subset B \cup D$.

c) $A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$.

Exercícios Complementares

5 — Dados A, B, C, D subconjuntos. Prove as seguintes afirmações:

a) Se $\wp(A) = \wp(B)$ então $A = B$.

b) Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$ então $B = C$.

c) $A \backslash B \subset B$ se e somente se $A \backslash B = \emptyset$.

6 — Suponha A, B, C não vazios. Mostre que:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) Se $B \cap C \neq \varnothing$, então $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) Se $B \backslash C \neq \varnothing$, então $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

Respostas dos Exercícios

1 a.)$\{1,2,3,4\}$ **b.)**$\{2,3,4\}$ **e.)**$\{5,7\}$

2 a.) Demonstração que $A \cap A \subset A$: se $x \in A \cap A$ então $x \in A$ e $x \in A$ logo $x \in A$.
Demonstração que $A \subset A \cap A$: se $x \in A$ então $x \in A$ e $x \in A$ logo $x \in A \cap A$.

d.) Se $x \in A$ então $x \in A$ ou $x \in B$, logo $x \in A \cup B$.

g.) Demonstração que $A \cap \emptyset \subset \emptyset$: se $x \in A \cap \emptyset$, então $x \in A$ e $x \in \emptyset$ logo $x \in \emptyset$.
Demonstração que $\emptyset \subset A \cap \emptyset$: se $x \in \emptyset$, então por vacuidade temos que $x \in A$ e $x \in \emptyset$. Logo $x \in A \cap \emptyset$.

h.) Demonstraremos apenas uma das contenções, que $A \cup (A \cap B) \subset A$: se $x \in A \cup (A \cap B)$ então $x \in A$ ou $x \in A \cap B$. Dois casos: ou $x \in A$ ou $x \in A \cap B$, no segundo caso temos então $x \in A$ e $x \in B$ e logo $x \in A$. Em ambos os casos $x \in A$.

k.) Demonstraremos apenas uma das contenções, que $\wp(A) \cap \wp(B) \subset \wp(A \cap B)$. Se $C \in \wp(A) \cap \wp(B)$ então $C \in \wp(A)$ e $C \in \wp(B)$ e pela definição de conjunto potência, $C \subset A$ e $C \subset B$, logo se $c \in C$ temos que $c \in A$ e $c \in B$, ou seja $c \in A \cap B$, ou seja $C \subset A \cap B$, e logo $C \in \wp(A \cap B)$.

4 a.) Se $x \in A$ então, como $A \subset B$, $x \in B$. Como por hipótese $B \subset C$. se $x \in B$ então $x \in C$.

c.) Demonstraremos primeiramente que se $A \subset B$ então $A \cup B = B$. Nesse caso provaremos que se $A \subset B$ então $A \cup B \subset B$ e que se $A \subset B$ então $B \subset A \cup B$.

Se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$. No caso em que $x \in A$, usando que por hipótese $A \subset B$ temos que $x \in B$.
Se $x \in B$ então $x \in B$ ou $x \in A$, e assim $x \in A \cup B$.

Agora demonstraremos que se $A \cup B = B$ então $A \subset B$. Seja $x \in A$, então $x \in A \cup B$ e como $A \cup B = B$ então $x \in B$.

6 a.) Seja $C \in \wp(A) \cup \wp(B)$ então $C \subset A$ ou $C \subset B$. Desta forma se $c \in C$, então $c \in A$ ou $c \in B$, ou seja $c \in A \cup B$. Logo $C \subset A \cup B$, ou seja $C \in \wp(A \cup B)$.

c.) Falso.