UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 3 - Bases Matemáticas

Indução

1 — Calcule :

a) a soma dos n primeiros números pares.

b) a soma dos n primeiros números ímpares.

2 — Prove que para todo inteiro positivo n vale:

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

3 — Porque a seguinte demonstração está incorreta:

> **Teorema** Todas as pessoas têm a mesma cor dos olhos.
>
> **Demonstração** Faremos a demonstração por indução: para isso demonstraremos a afirmação "Todos os membros de qualquer conjunto de pessoas têm a mesma cor dos olhos ".
>
> Este afirmação é claramente verdadeiro para qualquer conjunto com apenas uma pessoa.
>
> Agora, suponha que temos um conjunto S de pessoas, e que a hipótese indutiva é verdadeiro para todos os conjuntos com um número menor de elementos. Seja então S_1 o conjunto formado removendo uma pessoa de S, e S_2 ser o conjunto formado pela remoção de outra pessoa de S.
>
> Por hipótese indutiva todos os membros da S_1 tem a mesma cor dos olhos, o que também é verdadeiro para S_2. Como $S_1 \cap S_2$ tem elementos de ambos os conjuntos, logo todos os elementos de S possuem a mesma cor dos olhos.

4 — Demonstre que para todo inteiro positivo n vale:

a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.

b) $1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \cdots + n(\frac{1}{2})^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

c) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.

d) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

e) $n < 2^n$.

f) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$.

5 — Dados a e r dois números inteiros, $r \neq 1$. A sequência $a_1 = a, a_2 = ra, a_3 = r^2a, \cdots, a_n = r^{n-1}a, \cdots$ é denominada **progressão geométrica de razão r**. Prove que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é:

$$S_n = \frac{r^n a - a}{r - 1}.$$

6 — Prove que $2n + 1 < 2^n$ para todo $n > 3$.

7 — Seja x um inteiro positivo. Demonstre que:

$$(1 + x)^n > 1 + nx, \text{para todo } n \geq 2.$$

8 — Ache os valores numéricos das seguintes somas:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k$

b) $\displaystyle\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} n^n$

9 — Prove por indução as seguintes propriedades do somatório:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (aditividade)

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (homogeneidade)

c) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$
(telescópica)

10 — Use as propriedades do exercício anterior para mostrar que:

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
(Dica: Use que $2k-1 = k^2-(k-1)^2$)

b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$
(Dica: Use o item anterior)

c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$
(Dica: $k^3-(k-1)^3 = 3k^2-3k+1$)

11 — Prove que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

12 — Prove que para qualquer inteiro positivo n o número $2^{2n}-1$ é divisível por 3.

13 — Prove que um caixa eletrônico pode entregar ao usuário qualquer valor maior ou igual a R$4 usando apenas notas de dois e de cinco reais.

* **14** — Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados ($n \geq 3$) é $(n-2)\pi$.

Exercícios Complementares

15 — Prove que

a) $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1}-2$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

d) $\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

e) $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$

f) $\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)!-1$

16 — Use indução para mostrar que um conjunto finito com n elementos possui 2^n subconjuntos.

* **17** — Prove que para todo $n \geq 9$,

$$n! \geq (2n)^2$$

* **18** — Prove para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} < 2-\frac{1}{n}$$

1 b.) Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = "1 = 1^2"$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

Reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2(k+1)-1)$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$$= (k+1)^2$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k+1)$. Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo.

2 Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$\begin{aligned} P(1) &= \text{“}1 + 2 = 2^{1+1} - 1\text{''} && (1) \\ P(1) &= \text{“}3 = 3\text{''} \quad \text{verdadeira} && (2) \end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2(2^{k+1}) - 1 \\ &= (2^{k+2}) - 1 \end{aligned}$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k+1)$. Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo.

4 d.) Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$\begin{aligned} P(1) &= \text{“}1 + 2 = 2^{1+1} - 1\text{''} \\ P(1) &= \text{“}3 = 3\text{''} \quad \text{verdadeira} \end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Usando a hipótese de indução, queremos demonstrar $P(k+1)$, reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k + 2^k + 1 &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2(2^{k+1}) - 1 \\ &= (2^{k+2}) - 1 \end{aligned}$$

7 Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(2) = \text{“}(1+x)^2 > 1 + 2x\text{''}$$
$$P(2) = \text{“}1 + 2x + x^2 > 1 + 2x\text{''}$$
$$\text{como } x > 0,\ P(2) \text{ é verdadeira}$$

Logo, $P(2)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$(1+x)^k > 1 + kx$$

Usando a hipótese de indução, queremos demonstrar $P(k+1)$, reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)((1+x)^k) \\ &\geq (1+x)(1+kx) \\ &\geq 1 + kx + x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k+1)x \end{aligned}$$

11 Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = \text{“}\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2}\text{'} \qquad \text{logo } P(1) \text{ é verdadeira}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Usando a hipótese de indução, queremos demonstrar $P(k+1)$, reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}}_{\text{Por hipótese de indução } = k/k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

12 Queremos demonstrar que para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$ existe $m \in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$2^{2n}-1=3m$$

Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1)=2^{2.1}-1=3\cdot 1$$

Vamos assumir que $P(k)$ é verdadeira, i.e., existe $m \in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$2^{2k}-1=3.m$$

ou seja, vamos assumir que

$$2^{2k}=3.m+1$$

Agora vamos demonstrar a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\begin{aligned}
2^2(k+1)-1 &= 2^{2k+2}-1 && (3)\\
&= 4.22k-1 && (4)\\
&= 4.(3m+1)-1 && (5)\\
&= 12m+4-1 && (6)\\
&= 3(4m+1) && (7)\\
& && (8)
\end{aligned}$$

E logo $2^2(k+1)-1$ é divisível por 3.