UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 4
Bases Matemáticas

Números Reais

1 — Considere os seguintes conjuntos. Diga quais são limitados superiormente e quais são limitados inferiormente. E se existir encontre o supremo e o ínfimo desses conjuntos:

a) $A = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$

b) $B = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

c) $C = \{1 - n! : n \in \mathbb{N}\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$

g) $G = \{\frac{n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\}$

h) $H = \{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

i) $I = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

j) $J = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$

2 — A partir dos axiomas A1, ..., A9 dos números reais prove as seguintes propriedades:

a) O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma.

b) O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação.

c) Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, resulta $a.0 = 0$

d) Para quaisquer números reais a e b, tem-se que:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \,\text{ou}\, b = 0.$$

3 — Mostre, utilizando propriedades básicas, que:

a) Se $ax = a$ para algum $a \neq 0$ então x=1.

b) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

c) Se $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$.

d) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

e) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

f) Se $a \leq b$ e $c \leq d$ então $a + c \leq b + d$.

g) Se $a \leq b$ então $-b \leq -a$.

h) Se $a \leq b$ e $c \leq d$ então $a + c \leq b + d$.

Respostas dos Exercícios

1 **a.)**Limitado inferiormente, mas não superiormente $\inf A = 1$.
b.) Limitado inferiormente e superiormente $\sup B = 2$ $\inf B = 1$
d.) Limitado inferiormente, mas não superiormente $\inf A = 1$.
f.) Limitado inferiormente e superiormente $\inf F = -\sqrt{3}$ e $\mathsf{sup} F = \sqrt{3}$.
g.) Limitado inferiormente e superiormente.

2 **a.)**Suponha que não fosse, i.e, existem 0 e $0'$ distintos tais que:

$$a + 0 = a \quad \forall a$$

$$a + 0' = a \quad \forall a$$

Considere então $0 + 0'$
Como $0 = 0 + 0' = 0'$
Temos um absurdo.

3 **a.)**Por hipótese $ax = a$ e como $a \neq 0$ existe a^{-1}
Logo $a^{-1}(ax) = x$ por um lado
e por outro
$a^{-1}(ax) = a^{-1}(a) = 1$ por outro.
Logo $x = 1$
b.) Calculando $(x - y)(x + y)$ usando a distributiva temos:

$$(x - y)(x + y) = x(x + y) - y(x + y) = x^2 + xy - yx - y^2 = x^2 - y^2$$

c.) Se $x^2 = y^2$ temos que $x^2 - y^2 = 0$ o que implica $(x + y)(x - y) = 0$ o que implica $x = y$ ou $x = -y$
f.) Como $a \leq b$ temos por $A11$ que $a + c \leq b + c$
Por outro lado como $c \leq d$ temos por $A11$ que $b + c \leq b + d$ logo por transitividade temos:

$$a + c \leq b + d$$

h.) Como $c \geq d$, pelo item b temos $-c \leq -d$ e logo pelo item a temos: $a - c \leq b - d$.