UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 6
Bases Matemáticas

Funções I

1 — Dados A e B conjuntos, defina rigorosamente o conceito de função de A em B.

2 — Dados os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, diga qual das relações abaixo definem uma função $f : A \to B$.

a) $R = \{(e, 1), (o, 2)\}$
b) $R = \{(a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 2), (u, 2)\}$
c) $R = \{(a, 1), (e, 2), (i, 3), (o, 4), (u, 5)\}$
d) $R = \{(a, 1), (e, 1), (e, 2), (i, 1), (u, 2), (u, 5)\}$
e) $R = \{(a, 3), (e, 3), (i, 3), (o, 3), (u, 3)\}$
f) $R = \{(a, 1), (e, 3), (i, 3), (o, 2), (u, 2)\}$
g) $R = \{(a, 2), (e, 1), (i, 4), (o, 5), (u, 3)\}$

3 — Para cada função que aparece no exercício acima, diga se é injetora, sobrejetora e/ou bijetora.

4 — Calcule o domínio máximo D das seguintes funções (veja observação, ao final da lista, sobre a notação usada neste exercício):

a) $f : D \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{1}{n(n+4)(3n+1)}$
b) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+4)(3x+1)}$
c) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
d) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x^2-4)}}$
e) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sqrt{1 + x} - x}$
f) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|1 + x| - |x^2|}$
g) $f : D \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt{|1 + n| - |n^2|}$
h) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{|x| - 3}}$

5 — Defina função injetora, sobrejetora e bijetora e a partir dessa definição, para cada uma das seguintes funções, prove ou dê contra-exemplos que elas são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.

a) Se $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $f : A \to A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

b) Se $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $g : A \to A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \neq 7 \\ f(7) = 1 & \text{se } x = 7. \end{cases}$$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$.

d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n - |n|$.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$.

g) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

h) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

i) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, x)$.

k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, |x|)$.

l) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - |y|$.

m) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x, y^3)$.

6 — Determine o conjunto imagem da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = (-1)^n n.$$

7 — Considerando a função f do exercício anterior, determine o conjunto imagem da função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(n) = f(n) + f(n + 1)$.

8 — Para cada uma das seguintes funções, calcule $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2\})$

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |(x + 2)^2 - 1|$.

c) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - |y|$.

Exercícios Complementares

9 — Seja dada uma função $f : A \to B$. Se X e Y são subconjuntos do domínio A e se V e W são subconjuntos do contradomínio B, mostre que:

a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

c) $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$.

d) $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$.

e) Se $X \subset Y$ então $f(X) \subset f(Y)$.

f) Se f é injetora então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

g) Se $V \subset W$ então $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$.

h) $X \subset f^{-1}(f(X))$.

i) Se f é injetora então $X = f^{-1}(f(X))$.

* **10 —** Seja A um conjunto (não vazio) com n elementos e seja B um conjunto qualquer. Mostre cada uma das seguintes afirmações:

a) Se existe uma função injetora $f : A \to B$, então B possui *pelo menos* n elementos.

b) Se existe uma função sobrejetora $f : A \to B$, então B possui *no máximo* n elementos. Conclua, das afirmações acima, a seguinte propriedade: dois conjuntos finitos possuem o mesmo número de elementos se, e somente se, existe uma função bijetora entre tais conjuntos.

Soluções da Lista 6

1. Ver Notas de Aula

2. (a) não;(b) sim;(c) sim;(d) não;(e) sim;(f) sim;(g) sim

3. (b) nada;(c) bijetora;(e) nada;(f) nada;(g) bijetora

4. (a) $D = \mathbb{N}^*$;
   (b) $D = \mathbb{R}\backslash\{-4, -1/3, 0\}$;
   (c) $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;
   (d) $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$;
   (e) $D = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;
   (f) $D = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;
   (g) $D = \{0, 1\}$;
   (h) $D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

5. (Para as definições, ver Notas de Aula)
   (a) nada; (b) bijetora; (c) injetora; (d) nada; (e) bijetora; (f) nada; (g) injetora; (h) nada; (i) injetora; (j) injetora; (k) injetora; (l) sobrejetora; (m) bijetora

Resolução de alguns itens do exercício 5:

c.) A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$ é injetora pois se

$$f(n') = f(n) \Rightarrow 3n' + 1 = 3n + 1 \Rightarrow n = n'$$

A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$ não é sobrejetora pois 5 pertence ao contradomínio, mas não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = 5$$

pois isso implicaria que $3n + 1 = 5 \Rightarrow 3n = 4$ e claramente não existe nenhum natural com essa propriedade.

e.) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ é injetora pois;

$$f(x') = f(x) \Rightarrow ax + b = ax' + b \Rightarrow ax' = ax$$

e como $a \neq 0$ temos que $x = x'$ e logo a função é injetora.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ é sobrejetora pois dado $y \in \mathbb{R}$ então

$$f(x) = y \Rightarrow ax + b = y \Rightarrow x = \frac{y - b}{a}$$

e $f(\frac{y-b}{a}) = y$ logo é sobrejetora.

j.) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, x)$ não é sobrejetora, pois (1,0) pertence ao contradomínio mas não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = (1, 0)$$

pois se isso ocorresse teríamos:

$$(x, x) = (1, 0)$$

e logo $x = 1$ e $x = 0$, o que é um absurdo.

l.) A função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - |y|$ não é injetora pois:

$$f((0, 1)) = 1 = f((0, -1))$$

6. $\operatorname{Im} f = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{-(2n + 1) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

7. $\operatorname{Im} f = \{-1, 1\}$

8. (a) $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing; f^{-1}(\{1\}) = \{0\}; f^{-1}(\{2\}) = \varnothing;$
(b) $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing; f^{-1}(\{1\}) = \varnothing; f^{-1}(\{2\}) = \varnothing;$
(c) $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing; f^{-1}(\{1\}) = \{0\}; f^{-1}(\{2\}) = \varnothing;$
(d) $f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \text{ e } y = \pm x\};$
$f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 1 \text{ e } y = \pm(x - 1)\};$
$f^{-1}(\{2\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 2 \text{ e } y = \pm(x - 2)\}$

9. Demonstração de alguns itens:

   (a) Se $X \cup Y = \varnothing$, a afirmação é trivial. Caso contrário, seja $a \in f(X \cup Y)$. Então existe $b \in X \cup Y$ tal que $f(b) = a$. Como $b \in X$ ou $b \in Y$, então $a \in f(X)$ ou $a \in f(Y)$. Assim $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. Por outro lado, se $a \in f(X) \cup f(Y)$, então existe $b \in X$ ou $b \in Y$ tal que $f(b) = a$. Em qualquer um dos casos, existe $b \in X \cup Y$ tal que $f(b) = a$. Logo, $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

   (d) Se $V \cap W = \varnothing$, então a inclusão $f^{-1}(V \cap W) \subset f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$ é trivial. Senão, seja $x \in f^{-1}(V \cap W)$. Como $f(x) \in V \cap W$, então $f(x) \in V$ e $f(x) \in W$, e assim resulta $x \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Logo, vale $f^{-1}(V \cap W) \subset f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Vice-versa, se $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) = \varnothing$, a inclusão $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V \cap W)$ é trivial. Senão, seja $x \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Então $f(x) \in V$ e $f(x) \in W$, ou seja, $f(x) \in V \cap W$. Logo, $x \in f^{-1}(V \cap W)$, o que prova a inclusão $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V \cap W)$.

   (f) A inclusão $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ é objeto do item (b). Mostremos somente a inclusão $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Se $f(X) \cap f(Y) = \varnothing$, a inclusão é trivial. Senão, seja dado $a \in f(X) \cap f(Y)$. Então existem $b \in X$ e $c \in Y$ tais que $f(b) = a$ e $f(c) = a$. Como a função f é injetora (hipótese do exercício), deve resultar $b = c$. Assim, $b \in X \cap Y$ e portanto $a \in f(X \cap Y)$.

10. Vamos provar as afirmações por indução sobre o número n de elementos do conjunto A. Denotaremos o número de elementos de um conjunto X por $|X|$.

   (a) $P(n)$: se um conjunto A tem n elementos e se existe uma função injetora $f : A \to B$, então o conjunto B possui ao menos n elementos. Usaremos a *primeira versão* do PIF.
   Se $n = 1$, então o conjunto B deve possuir ao menos a imagem de tal elemento. Logo $|B| \geq 1$ e $P(1)$ é verdadeira. Agora, assumamos que, para um certo natural $k \geq 1$, vale a propriedade $P(k)$, isto é: se $|A| = k$ e se existe uma função injetora $f : A \to B$, então $|B| \geq k$. Provemos que vale $P(k+1)$. Para isso, seja dado um conjunto de $k+1$ elementos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$ e seja $f : A \to B$ uma função injetora. Considere os conjuntos $A' = A \backslash \{a_{k+1}\}$ e $B' = B \backslash \{f(a_{k+1})\}$ e tome a função $g : A' \to B'$ dada por $g(x) = f(x)$. Note que a função g está bem definida e ainda é injetora, pois f é injetora, e note que o conjunto A' tem k elementos. Pela hipótese indutiva, B' possui ao menos k elementos. Por como foi construído B', concluímos que B possui ao menos $k+1$ elementos, provando $P(k+1)$. Pelo PIF, $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$.

   (b) $P(n)$: se um conjunto A tem n elementos e se existe uma função sobrejetora $f : A \to B$, então o conjunto B possui no máximo n elementos. Usaremos a *segunda versão* do PIF.
   Se $n = 1$, então $\operatorname{Im} f$ só pode conter um elemento. Como $\operatorname{Im} f = B$, resulta $|B| = 1$, logo $P(1)$ é verdadeira. Agora, assumamos que, fixado $n \in \mathbb{N}$, vale a propriedade $P(k)$ para todo $1 \leq k < n$, isto é: se $|A| = k < n$ (note que $|A| \geq 1$ pois $A \neq \varnothing$) e se existe uma função sobrejetora $f : A \to B$, então $|B| \leq k$. Provemos que vale $P(n)$. Para isso, seja A um conjunto de n elementos e seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Escolha $b \in \operatorname{Im} f$ e considere os conjuntos $A' = A \backslash f^{-1}(\{b\})$ e $B' = B \backslash \{b\}$. Tome a função $g : A' \to B'$ dada por $g(x) = f(x)$. Note que a função g está bem definida e ainda é sobrejetora. Note, por fim, que o conjunto A' tem um número $k < n$ de elementos. Pela hipótese indutiva, $|B'| \leq k$. Como $|B| = |B'| + 1$ e $k < n$, então $|B| \leq n$, o que prova $P(n)$. Pelo PIF (segunda versão), a propriedade $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$.

Observação: A notação $f : D \subset X \to Y$ indica uma função $f : D \to Y$, onde $D \subset X$.