

Lista 9 - Bases Matemáticas

Sequências I

1 — Sejam dadas as seqüências

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{n-1}{n}$$

$$c_n = (-1)^n, \quad d_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Em cada caso abaixo, determine para quais valores de n vale

- $a_n \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$
- $b_n \in (0.999, 1.111)$
- $c_n \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
- $d_n \in (-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000})$

2 — Considerando as mesmas seqüências do exercício anterior, diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

- Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ para todo $n \geq m$.
- Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $b_n \in (0.999, 1.111)$ para todo $n \geq m$.
- Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $c_n \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ para todo $n \geq m$.
- Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $d_n \in (-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000})$ para todo $n \geq m$.

3 — Em cada caso abaixo, determine $m \in \mathbb{N}^*$ de modo que

- $\frac{1}{n^2-n+1} < \frac{1}{2}$, para todo $n \geq m$.
- $\frac{1}{n} < 10^{-23}$, para todo $n \geq m$.
- $1 - \frac{1}{10^4} < \frac{n+2}{n-2} < 1 + \frac{1}{10^4}$, para todo $n \geq m$.
- $-\frac{1}{10^{10}} < e^{-n} < \frac{1}{10^{10}}$, para todo $n \geq m$.
- $-\frac{1}{10} < \frac{\text{sen } n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{10}$, para todo $n \geq m$.

4 — Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, determine, em cada caso, $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$ para todo $n \geq m$, onde:

- $a_n = \frac{1}{n}$ e $L = 0$
- $a_n = \frac{n}{n-1}$ e $L = 1$
- $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ e $L = 0$
- $a_n = \frac{1}{2+\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$ e $L = 1/3$
- $a_n = \frac{1}{2+\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$ e $L = 1$
- $a_n = \frac{n^2}{9-n^2}$ e $L = -1$

5 — Usando o exercício anterior, conclua que:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = 1/3$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{9-n^2} = -1$

6 — Sejam dadas as seqüências

$$a_n = n^2, \quad b_n = -n^3, \quad c_n = \sqrt{n}$$

$$d_n = (-1)^n n, \quad e_n = n + (-1)^n n.$$

Em cada caso abaixo, determine para quais valores de n vale

- $a_n > 10^4$
- $b_n < -10^6$
- $c_n > 2000$
- $d_n < -10^{20}$
- $e_n > 10$

7 — Considerando as mesmas seqüências do exercício anterior, diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

- Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n > 10^4$ para todo $n \geq m$.
- Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $b_n < -10^6$ para todo $n \geq m$.
- Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $c_n > 2000$ para todo $n \geq m$.
- Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $d_n < -10^{20}$ para todo $n \geq m$.
- Existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $e_n > 10$ para todo $n \geq m$.

8 — Em cada caso abaixo, determine $m \in \mathbb{N}^*$ de modo que

- $\frac{n^2+n+1}{n} > 100$, para todo $n \geq m$.
- $e^n > 10^4$, para todo $n \geq m$.
- $-n^3 < -10^6$, para todo $n \geq m$.
- $\sqrt{n} > 4.10^{10}$, para todo $n \geq m$.
- $1 - n^2 < -10^{10}$, para todo $n \geq m$.

9 — Dado $M > 0$ arbitrário, determine, em cada caso, $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n > M$ para todo $n \geq m$, onde:

- a) $a_n = n!$
- b) $a_n = \sqrt{n}$

10 — Usando o exercício anterior, conclua que:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$

11 — Dado $M > 0$ arbitrário, determine, em cada caso, $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n < -M$ para todo $n \geq m$, onde:

- a) $a_n = -n^4$
- b) $a_n = \ln \frac{1}{n}$

12 — Usando o exercício anterior, conclua que:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^4 = -\infty$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n} = -\infty$

Respostas dos Exercícios

1 a.) $\{n \in \mathbb{N} | n > 10\}$ **b.)** $\{n \in \mathbb{N} | n > 1000\}$ **c.)** $\{n \in \mathbb{N} | n \text{ é par}\}$ **d.)** $\{n \in \mathbb{N} | n > 1000\}$

2 a.)Sim **b.)**Sim **c.)**Não **d.)**Sim

3 a.) $m = 2$ (na realidade m pode ser qualquer natural maior igual à 2. **b.)** $m = 10^2 3 + 1$ **c.)** $m = 40003$ **d.)** $m = 24$

4 a.) $m = \frac{1}{e} + 1$ **b.)** $m = \frac{1+\epsilon}{e} + 1$ **c.)** $m = \frac{1-2e^2}{e^2} + 1$ **d.)** $m = \frac{1-6e+9e^2}{18e+27e^2} + 1$ **e.)**Não existe m **f.)** $m = \sqrt{(9+9e)/e} + 1$

6 a.) $\{n \in \mathbb{N} | n > 100\}$ **b.)** $\{n \in \mathbb{N} | n > 100\}$ **c.)** $\{n \in$

$\mathbb{N} | n > 4000000\}$ **d.)** $\{n \in \mathbb{N} | n \text{ é impar e } n > 10^{(20)}\}$ **e.)** $\{n \in \mathbb{N} | n \text{ é par e } n > 5\}$

7 a.)Sim **b.)**Sim **c.)**Sim **d.)**Não **e.)**Não

8 a.) $m = \frac{1}{2} (99 + \sqrt{9797}) + 1$ **b.)** $m = 10$ **e.)** $m = \sqrt{10000000001} + 1$

9 a.) $m = M + 1$ **b.)** $m = M^2 + 1$

11 a.) $m = M^{1/4} + 1$