

Lista de Férias

Bases Matemáticas/FUV

1 — Encontre uma expressão para a função inversa:

- a) $\frac{1+3x}{5-2x}$
- b) $\frac{1+e^x}{1-e^x}$
- c) $\sqrt{2+5x}$
- d) $\ln(x+3)$

2 — Esboce os gráficos das funções:

- a) $\cos(3x + \pi) - 1$
- b) $3 - \sin(x)$
- c) $|1 + \sin(x)|$
- d) $\frac{x}{x^2 - 1}$

3 — Faça o gráfico da equação $|x| + |y| = 1 + |xy|$.

4 — Faça o gráfico $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$

5 — Calcule

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-cx} - 1}{x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg(x)$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotg(2x)}{\cossec(x)}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sen(x-1)}{x^2 + x - 2}$

6 — Prove a partir da definição de limite que:

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 6) = 9$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3} 4 = 4$
- e) $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 4$
- f) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$

7 — Prove que a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ não possui limite quando $x \rightarrow 0$

8 — Calcule os seguintes Limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^3}{x^3 + 1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right)$
- e) $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{3x^3 + x^2 + x}$

9 — Calcule os seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$

- b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$

10 — Ache os seguintes Limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}$
 c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$
 d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan \pi x}{x + 2}$
 e) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

11 — Prove pela definição que as seguintes funções são contínuas nos pontos especificados:

- a) $f(x) = x^4$ em $x = 1$
 b) $f(x) = |x|$ em $x = 0$
 c) $f(x) = \sqrt{x}$ em $x = 4$
 d) $f(x) = 5x - 2$ em $x = 1$

Limites Laterais

12 — Calcule os limites laterais:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

 d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

- e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{se } x \geq 2 \\ 6x^2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

- f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^3-1}$
 g) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3-1}$

13 — Suponha que para todo x

$$|g(x)| \leq x^4.$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

14 — Calcule os seguintes limites usando o teorema do confronto:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} 2^{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

15 — Seja $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ a função maior inteiro. Para que valores de a existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

16 — Existe um número a tal que o limite

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

existe? Caso afirmativo encontre a e o valor do limite.

17 — Seja $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$

- a) Esboce o gráfico de $f(x)$
 b) Se n for um inteiro calcule:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow n^+} f(x)$$

- c) Para quais valores de a existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

18 — Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1 & \text{se } x \leq 3 \\ cx^2 - 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

19 — Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c & \text{se } x < 4 \\ cx + 20 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

20 — Use o teorema do valor intermédio para provar que existe uma raiz da equação no intervalo especificado:

- a) $x^4 + x - 3 = 0$ (1, 2)
- b) $\sqrt[3]{x}$ (0, 1)
- c) $\cos(x) = x$ (0, 1)
- d) $\ln x = e^{-x}$ (1, 2)

21 — Use o teorema do valor intermediário para provar que existe um número c tal que $c^2 = 2$. (Ou seja, demonstre a existência de $\sqrt{2}$)

22 — Calcule os seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 + 5x^3 - 4x$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 - 4x}{-x^3 + 3x + 1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - x}{4 + x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x + 3}}{2x - 1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x + 5}$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - 1}$

23 — Calcule os seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{7}{4 - x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 1}{x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x^3 - x^2}$

24 — Calcule os seguintes Limites

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \text{sen}(x))^{\frac{1}{x}}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2))$

25 — O que ocorre com as raízes da equação

$$ax^2 - bx + c = 0$$

Se o coeficiente a tende a zero e os coeficientes b, c ficam constantes?

26 — Demonstrar que todo polinômio de grau impar possui pelo menos uma raiz real.

27 — Ache as constantes k e b de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[kx + b - \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right] = 0$$

Qual o significado da reta $kx + b$?

28 — Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. (Esboce os gráficos e confira usando algum software computacional)

- a) $y = \frac{x}{x+4}$
- b) $y = \frac{x^3}{x^2 + 3x - 10}$

c) $y = \frac{x^3 + 1}{x^3 + x}$
 d) $y = \frac{x}{\sqrt[4]{x^4 + 1}}$

29 — Encontre $\lim_{x \rightarrow \infty}$ se

$$\frac{4x - 1}{x} < f(x) < \frac{4x^2 + 3x}{x^2}$$

para todo $x > 5$.

30 — Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $\frac{1 - u^2}{1 + u^2}$

b) $x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$

c) $\frac{e^x}{1 + e^x}$

d) $\frac{e^{ax}}{(ax)^2}$

e) $\frac{ax + e^x}{e^{ax} + x}$

f) $\sec(x)$

g) $\sec(x) \operatorname{tg}(x)$

h) $\operatorname{cosec}(x)$

i) $x \operatorname{sen}(x) \cos(x)$

j) $\frac{\cos(x)}{x + 2 \cos(x)}$

k) $\cos(\operatorname{sen}(e^x))$

l) $\left(t - \frac{1}{t}\right)^{\frac{5}{2}}$

m) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

n) $2^{3^{2^x}}$

31 — Ache o coeficiente angular da reta secante a parábola

$$y = 2x - x^2$$

se as abscissas dos pontos de intersecção são iguais a:

a) $x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

b) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1.1$

c) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1.01$

d) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1 + h$

32 — A que valor tende o limite da secante no último caso quando $h \rightarrow 0$?

33 — Ache a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para a função $y = \frac{1}{x}$

a) no ponto 2 e $\Delta x = 1$

b) no ponto 2 e $\Delta x = 0.1$

c) no ponto 2 e $\Delta x = 0.01$

34 — Para as seguintes funções calcule a derivada no ponto indicado através do limite do quociente de Newton:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a) derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 0$

b) derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 1$

c) derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 1$

d) derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 2$

e) derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $a = -1$

f) derivada de $f(x) = x^4$ no ponto $a = 0$

g) derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 4$

h) derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $a = 8$

i) derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = 1$

j) derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = -1$

35 — Prove que $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$

36 — Mostre $\frac{d}{dx} a^x = \ln(a)a^x$. (Use que

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x).$$

37 — Escreva a equação da reta tangente as curvas $y = f(x)$ no ponto especificado:

- a) $y = x^3$ no ponto $x = 3$
- b) $y = x^7 + 3x$ no ponto $x = 1$
- c) $y = \text{sen}(x)$ no ponto $x = \pi$
- d) $y = 2^x$ no ponto $x = 2$
- e) $y = \cos(x) + x^2$ no ponto $x = 0$

38 — Quantas retas tangentes a curva $y = \frac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1, 2)$. Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

39 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

- a) $f(x) = 3x^4 + 5x + 8$
- b) $f(x) = x^7 + 6x^6 + \frac{1}{5}x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + \pi$
- c) $f(x) = ax^2 + bx + c$
- d) $f(x) = ax^m + bx^{m+n}$
- e) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \frac{\ln(4)}{x} + \sqrt{5}x + \ln(7)$
- f) $f(x) = \frac{2}{5x-3} - \frac{1}{x}$
- g) $f(x) = x^{\frac{a}{2}} + x^{\frac{a+4}{2}} + ax^{a-1}$
- h) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x^2}}$

40 — Seja

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Esboce os gráficos de $\sinh(x)$ e de $\cosh(x)$.

Mostre que:

- a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- b) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
- c) $\cosh(-x) = \cosh(x)$
- d) $(\sinh(x))' = \cosh(x)$
- e) $(\cosh(x))' = \sinh(x)$

41 — Calcule as seguintes derivadas:

- a) $f(x) = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$
- b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- c) $f(x) = (3 - 2 \text{sen}(x))^5$
- d) $f(x) = \sqrt[3]{a + bx^3}$
- e) $f(x) = \sqrt[3]{\text{sen}^2(x)} + \frac{1}{\cos^3(x)}$
- f) $f(x) = \text{sen}(5x) + \cos\left(\frac{x}{7}\right) + \text{tg}(\sqrt{x})$
- g) $f(x) = \text{sen}(x^2 - 5x + 1) + \text{tg}\left(\frac{a}{x}\right)$
- h) $f(x) = \log_{10}(\text{sen}(x))$
- i) $f(x) = \ln(e^x + 5 \text{sen}(x) - 4x^3)$
- j) $f(x) = \frac{a + bx^n m}{a - bx^n}$
- k) $f(x) = x^4(a - 2x^3)^2$
- l) $f(x) = 3^{\cotg\left(\frac{1}{x}\right)}$

42 — Em que ponto a tangente a parábola $y = x^2 - 7x + 3$ é paralela a reta $5x + y - 3 = 0$.

43 — Achar a equação da tangente e da normal a curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $-2, 5$.

44 — Dado $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Encontre os pontos do gráfico de f nos quais a tangente é horizontal.

45 — Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determine a, b, c, d se $p(0) = p(1) = -2$, $p'(0) = -1$ e $p''(0) = 10$.

46 — O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação

$$y(t) = 10 + \frac{1}{4} \text{sen}(10\pi t)$$

- a) Encontre a velocidade da partícula após t segundos
- b) Em quais instantes de tempo a partícula está parada?
- c) Em quais instantes de tempo a partícula está subindo?

47 — O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno. Suponha que a equação do movimento de um ponto sobre essa mola é

$$s(t) = 2e^{-1.5t} \text{sen}(2\pi t)$$

onde s é medida em centímetros e t em segun-

dos.

- a) Encontre a velocidade após t segundos.
- b) Encontre os instantes de tempo nos quais a partícula se encontra em repouso e a respectiva posição nesses instantes.
- c) Mostre que $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$. Interprete o significado desse limite.

Respostas dos Exercícios

8 a) 1 b) 0 c) 6 f) 0 g) $1/3$

10 a) 4 b) n/m c) $\cos(\alpha)$ e) $-1/\sqrt{2}$

13 0

16 15; -1.

18 $1/3$

22 a) ∞ b) $-\infty$ c) -1 d) $1/2$ e) ∞ f) $1/2$

23 a) $-\infty$ b) $-\infty$ c) ∞ d) ∞ e) $-\infty$

24 a) e^k b) e^{-2} (Dica: Use o item a) c) $1/4$ d) e
e) 1 f) $\ln(2)$

31 a) -1 d) -h

33 a) $-1/6$ b) $-5/21$ c) $-50/201$

34 a) 1 b) 1 c) 2 d) 4 e) 3 f) 0

38 Dois pontos, $(-2 \pm \sqrt{3}, (1 \mp \sqrt{3})/2)$

39 b) $2x + 9x^2 + 4x^3 + x^4 + 36x^5 + 7x^6$ d) $amx^{m-1} + b(m+n)x^{m+n-1}$

41 a) $30(1 + 3x - 5x^2)^{29}(3 - 10x)$ b) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $-10 \cos(x)(3 - 2 \sin(x))^4$ d) $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a + bx^3)^2}}$ f)

$5 \sin(5x) - \frac{1}{7} \sin(\frac{x}{7}) + \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ h) $\cotg(x) \log_{10} e$ j)

$2abmnx^{n-1} \frac{(a + bx^n)^{m-1}}{(a - bx^n)^{m+1}}$ l) $4x^3(a - 2x^3)(a - 5x^3)$

43 $y - 5 = 0$ $x + 2 = 0$