

Lista 3

Funções de Uma Variável

Derivadas I

Derivadas: Definição e Regras de Derivação

1 — Ache o coeficiente angular da reta secante a parábola

$$y = 2x - x^2$$

se as abscissas dos pontos de intersecção são iguais a:

- a) $x_1 = 1 \quad x_2 = 2$
- b) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1.1$
- c) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1.01$
- d) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1 + h$

2 — A que valor tende o limite da secante no último caso quando $h \rightarrow 0$?

3 — Ache a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para a função $y = \frac{1}{x}$

- a) no ponto 2 e $\Delta x = 1$
- b) no ponto 2 e $\Delta x = 0.1$
- c) no ponto 2 e $\Delta x = 0.01$

4 — Para as seguintes funções calcule a derivada no ponto indicado através do limite do quociente de Newton:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- a) derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 0$
- b) derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 1$
- c) derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 1$
- d) derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 2$
- e) derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $a = -1$
- f) derivada de $f(x) = x^4$ no ponto $a = 0$

- g) derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 4$
- h) derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $a = 8$
- i) derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = 1$
- j) derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = -1$

5 — Prove que $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\text{sen}(x)$

6 — Mostre $\frac{d}{dx} a^x = \ln(a)a^x$. (Use que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$).

7 — Escreva a equação da reta tangente as curvas $y = f(x)$ no ponto especificado:

- a) $y = x^3$ no ponto $x = 3$
- b) $y = x^7 + 3x$ no ponto $x = 1$
- c) $y = \text{sen}(x)$ no ponto $x = \pi$
- d) $y = 2^x$ no ponto $x = 2$
- e) $y = \cos(x) + x^2$ no ponto $x = 0$

8 — Quantas retas tangentes a curva $y = \frac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1, 2)$. Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

9 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

- a) $f(x) = 3x^4 + 5x + 8$
- b) $f(x) = x^7 + 6x^6 + \frac{1}{5}x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + \pi$
- c) $f(x) = ax^2 + bx + c$
- d) $f(x) = ax^m + bx^{m+n}$
- e) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \frac{\ln(4)}{x} + \sqrt{5}x + \ln(7)$
- f) $f(x) = \frac{2}{5x-3} - \frac{1}{x}$
- g) $f(x) = x^{\frac{a}{2}} + x^{\frac{a+4}{2}} + ax^{a-1}$
- h) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x^2}}$

10 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

- a) $f(x) = 5 \operatorname{sen}(x) + 6 \operatorname{cos}(x)$
 b) $f(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x)$
 c) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + \operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{cos}(x)}$
 d) $f(x) = x \operatorname{cotg}(x)$
 e) $f(x) = (x - 2) \operatorname{sen}(x) + x^2 \operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x) \operatorname{cos}(x)$

11 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

- a) $f(x) = x^7 e^x$
 b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
 c) $f(x) = e^x \operatorname{cos}(x)$
 d) $f(x) = \frac{x^n}{\ln(x)}$
 e) $f(x) = x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{3}$
 f) $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x + 5^x + 6^x + 7^x$
 g) $f(x) = \pi^x + 3^x x + 4^x \operatorname{cos}(x)$
 h) $f(x) = \log_2(x) + \log_3(x) + \log_4(x)$
 i) $f(x) = 2^x \log_3(x)$

12 — Seja

$$\operatorname{cosh}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{senh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Esboce os gráficos de $\operatorname{senh}(x)$ e de $\operatorname{cosh}(x)$ utilizando os gráficos de e^x e e^{-x} .

13 — Mostre que:

- a) $\operatorname{cosh}^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$
 b) $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$
 c) $\operatorname{cosh}(-x) = \operatorname{cosh}(x)$
 d) $(\operatorname{senh}(x))' = \operatorname{cosh}(x)$
 e) $(\operatorname{cosh}(x))' = \operatorname{senh}(x)$

14 — Calcule as seguintes derivadas:

- a) $f(x) = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$
 b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
 c) $f(x) = (3 - 2 \operatorname{sen}(x))^5$
 d) $f(x) = \sqrt[3]{a + bx^3}$
 e) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)} + \frac{1}{\operatorname{cos}^3(x)}$
 f) $f(x) = \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{cos}\left(\frac{x}{7}\right) + \operatorname{tg}(\sqrt{x})$

g) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg}\left(\frac{a}{x}\right)$

h) $f(x) = \log_{10}(\operatorname{sen}(x))$

i) $f(x) = \ln(e^x + 5 \operatorname{sen}(x) - 4x^3)$

j) $f(x) = \frac{a + bx^{nm}}{a - bx^n}$

k) $f(x) = x^4(a - 2x^3)^2$

l) $f(x) = 3^{\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{x}\right)}$

15 — Em que ponto a tangente a parábola $y = x^2 - 7x + 3$ é paralela a reta $5x + y - 3 = 0$.

16 — Achar a equação da tangente e da normal a curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(1, -4)$.

17 — Achar a equação da tangente e da normal a curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(-2, 5)$.

18 — Dado $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Encontre os pontos do gráfico de f nos quais a tangente é horizontal.

19 — Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determine a, b, c, d se $p(0) = p(1) = -2$, $p'(0) = -1$ e $p''(0) = 10$.

Aplicações da Derivada e Derivação Implícita

20 — O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação

$$y(t) = 10 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(10\pi t)$$

- a) Encontre a velocidade da partícula após t segundos
 b) Em quais instantes de tempo a partícula está parada?
 c) Em quais instantes de tempo a partícula está subindo?

21 — O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno. Suponha

que a equação do movimento de um ponto sobre essa mola é

$$s(t) = 2e^{-1.5t} \text{sen}(2\pi t)$$

onde s é medida em centímetros e t em segundos.

- Encontre a velocidade após t segundos.
- Encontre os instantes de tempo nos quais a partícula se encontra em repouso e a respectiva posição nesses instantes.
- Mostre que $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$. Interprete o significado desse limite.

22 — Uma escada com 10m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

23 — Cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos permitindo uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x :

- Calcule $\frac{dV}{dx}$ quando $x = 3\text{mm}$ e explique seu significado.
- Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual a metade da área da superfície do cubo.

24 — Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce a uma velocidade radial de 60m/s . Encontre a taxa segundo a área dentro do círculo está crescendo depois de a) 1s b) 3s c) 5s. O que você pode concluir?

25 — A lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e do volume permanece constante: $PV = C$

- Encontre a taxa de variação do volume em relação a pressão.
- Uma amostra de gás está em um recipiente a baixa pressão e é regularmente comprimida a temperatura constante por 10min . O volume decresce mais rapidamente no início ou final dos 10 minutos. Explique.

26 — Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um lago e colhida regularmente. Um modelo para a variação da população é dada pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c} \right) P(t) - \beta P(t)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes, P_c é a população máxima que o pequeno lago pode manter (*capacidade de suporte*) e β é a porcentagem da população que é colhida.

- Qual o valor de $\frac{dP}{dt}$ corresponde à população estável?
- Se o pequeno lago pode manter 10000 peixes a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita é de 4% encontre o nível estável da população.
- O que acontece se β é elevado a 5%?

Funções definidas por partes

27 — Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq c \\ ax + b & \text{se } x > c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

28 — Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{se } x \leq c \\ ax + b & \text{se } x > c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

29 — Dado $c > 0$, seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } |x| > c \\ a + bx^2 & \text{se } |x| < c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

Respostas dos Exercícios

1 a) -1 d) -h

3 a) $-1/6$ b) $-5/21$ c) $-50/201$

4 a) 1 b) 1 c) 2 d) 4 e) 3 f) 0

8 Dois pontos, $(-2 \pm \sqrt{3}, (1 \mp \sqrt{3})/2)$

9 b) $2x + 9x^2 + 4x^3 + x^4 + 36x^5 + 7x^6$ d) $amx^{m-1} + b(m+n)x^{m+n-1}$

10 b) $\operatorname{cosec}(x)^2 + \sec(x)^2$ d) $\cotg(x) - x \operatorname{cosec}(x)^2$
 e) $(-2 + x) \cos(x) + \cos(x)^2 + x^2 \sec(x)^2 + \operatorname{sen}(x) - 2 \cos(x) \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)^2 + 2x \tan(x)$

11 a) $7e^x x^6 + e^x x^7$ b) $(-2e^x)/x^3 + e^x/x^2$ f) $2^x \ln(2) + 3^x \ln(3) + 4^x \ln(4) + 5^x \ln(5) + 6^x \ln(6) + 7^x \ln(7)$ h) $1/(x \ln(2)) + 1/(x \ln(3)) + 1/(x \ln(4))$ i) $2^x/(x \ln(3)) + (2^x \ln(2) \ln(x))/\ln(3)$

14 a) $30(1 + 3x - 5x^2)^{29}(3 - 10x)$ b) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $-10 \cos(x)(3 - 2 \operatorname{sen}(x))^4$ d) $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$ f)

$5 \operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{7} \operatorname{sen}(\frac{x}{7}) + \frac{\sec^2(\frac{\sqrt{x}}{2})}{2\sqrt{x}}$ h) $\cotg(x) \log_{10} e$ j)

$2abmnx^{n-1} \frac{(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$ l) $4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$

17 $y - 5 = 0$ $x + 2 = 0$

22 $5m/\text{rad}$

25 a) $\frac{dV}{dP} = -\frac{V}{P}$ b) No início.

27 $a = 2c, b = -c^2$

28 $a = \cos(c), b = -c \cos(c + \sin(c))$

29 $a = \frac{3}{2c} \quad b = -\frac{1}{2c^3}$