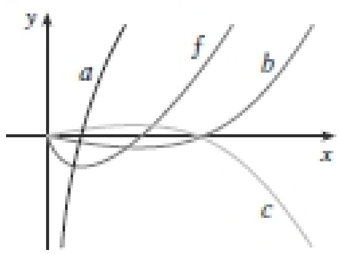
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

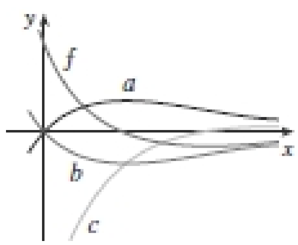
Lista 6

Funções de Uma Variável

Antiderivadas e Integral I

1 — O gráfico da função f é apresentado abaixo. Identifique o gráfico da antiderivada de f.

a) 

b) 

2 — Calcule as seguintes antiderivadas:

a) $\int x dx$

b) $\int (3x+1) dx$

c) $\int 3 dx$

d) $\int \left(x^2+x+1\right) dx$

e) $\int \frac{1}{x^2} dx$

f) $\int \left(x+\frac{1}{x^3}\right) dx$

g) $\int \sqrt[3]{x} dx$

h) $\int \left(3\sqrt[7]{x^2}+\cos(x)\right) dx$

i) $\int e^{4x} dx$

j) $\int \cos(3x) dx$

k) $\int \left(x+3e^{5x}+\cos(2x)\right) dx$

l) $\int \left(1-\cos(4x)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right)\right) dx$

m) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

n) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

o) $\int 3^x dx$

p) $\int \sec^2(2x) dx$

q) $\int \operatorname{sen}^2(x) dx$

3 — Uma partícula se desloca sobre o eixo x com uma função posição $x = x(t)$. Determine $x = x(t)$ sabendo que:

a) $\frac{dx}{dt} = 2t-1$ e $x(0) = 2$

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ e $x(0) = 0$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} = 3$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 1$

d) $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$ e $v(0) = 0$ e $x(0) = 1$

e) $\frac{d^2x}{dt^2} = \cos(3t)$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 0$

4 — Ache os valores numéricos das seguintes somas:

a) $\sum_{k=1}^{5} k$

b) $\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$

c) $\sum_{i=0}^{6} (2i+1)$

d) $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$

e) $\sum_{n=1}^{4} n^n$

f) $\sum_{n=2}^{4} n^2$

5 — Prove por indução as seguintes propriedades do somatório:

a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (aditividade)

b) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (homogeneidade)

c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (telescópica)

d) $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

6 — Use as propriedades do exercício anterior para mostrar que:

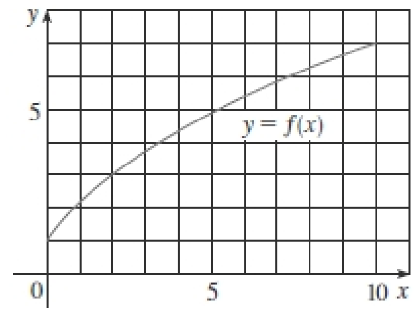
a) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ (Dica: Use que $2k-1 = k^2 - (k-1)^2$)

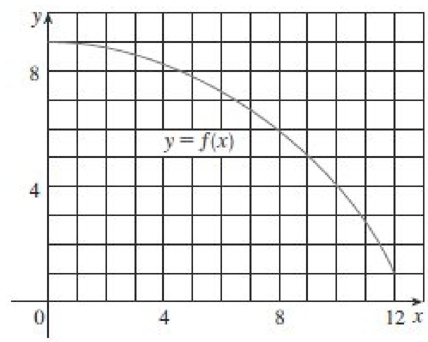
b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ (Dica: Use o item anterior)

c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ (Dica: $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$)

d) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

7 — Usando as figuras abaixo ache estimativas inferiores e superiores para a área abaixo do gráfico de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 10$ usando primeiramente 5 retângulos e posteriormente 10 retângulos.

a) 

b) 

8 —

a) Defina precisamente partição de um intervalo.

b) Defina precisamente soma de Riemann.

9 — Use uma soma de Riemann com extremos a direita e $n = 8$ para achar uma aproximação da integral

$$\int_0^5 x^2 - 3x$$

10 — Use uma soma de Riemann centrado no ponto médio para achar aproximações da integrais

a) $\int_0^1 \operatorname{sen}(x)dx \quad n = 4$

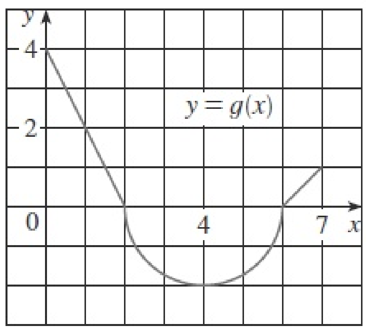
b) $\int_0^1 2^x dx \quad n = 10$

11 — O gráfico de g consiste de dois segmentos de retas e um semi-circulo, conforme figura abaixo. Calcule

a) $\int_0^2 g(x)dx$

b) $\int_2^6 g(x)dx$

c) $\int_0^6 g(x)dx$



12 — Calcule a partir da definição as seguintes integrais:

a) $\int_a^b x dx$

b) $\int_0^1 2x dx$

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx$

d) $\int_0^1 x^3 dx$

e) $\int_0^3 x^2 + x dx$

f) $\int_a^b (x^2 + x) dx$

13 — Expresse as seguintes integrais como limite de somatório

a) $\int_0^\pi \cos(x) dx$

b) $\int_0^1 e^x dx$

c) $\int_0^5 \cos(x) e^x dx$

14 — Enuncie o teorema Fundamental do Cálculo

15 — Calcule

a) $\int_0^1 (x+3) dx$

b) $\int_0^4 \frac{1}{3} dx$

c) $\int_0^1 \left(5x^3 + 2x + 4\right) dx$

d) $\int_1^4 \left(2x + 5\sqrt{x}\right) dx$

e) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(2x) dx$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(3x) dx$

g) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

h) $\int_0^{\pi/4} sen(x) dx$

i) $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx$

j) $\int_0^1 2xe^{x^2} dx$

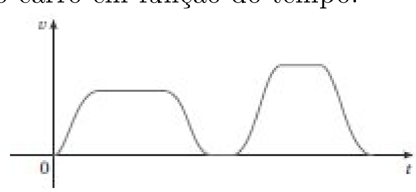
k) $\int_{-1}^1 x^3 e^{-x^4} dx$

l) $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$

m) $\int_0^{\pi/4} \sec^2(x) dx$

n) $\int_0^1 4^x dx$

16 — O gráfico abaixo representa a velocidade de um carro em função do tempo. Esboce o gráfico da posição do carro em função do tempo.



17 — A velocidade mínima necessária para que um objeto escape da força gravitacional da Terra é obtida da solução da equação

$$\int v dv = -GM \int \frac{1}{y^2} dy$$

onde v é a velocidade do objeto , y é a distância do objeto ao centro da Terra, G é a constante gravitacional e M é a massa da Terra.
Mostre que v e y estão relacionados pela equação

$$v^2 = v_0^2 + 2GM \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)$$

sendo v_0 é a velocidade mínima para o objeto escapar quando lançado da superfície da terra e R é o raio da Terra
(Sugestão: use o fato que se $y = R$ então $v = v_0$).

Respostas dos Exercícios

2 **a.)** $\frac{x^2}{2}$ **b.)** $x+\frac{3x^2}{2}$ **c.)** $3x$ **d.)** $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ **e.)** $-\frac{1}{x}$ **f.)** $-\frac{1}{2x^2}+\frac{x^2}{2}$ **h.)** $\frac{7}{3}x\left(x^2\right)^{1/7}+\sin(x)$ **i.)** $\frac{e^{4x}}{4}$ **j.)** $\frac{1}{3}\sin(3x)$ **k.)** $(3e^(5x))/5+x^2/2+1/2Sin[2x]$

3 **a.)** $x(t)=2-t+t^2$ **b.)** $x(t)=\text{tg}(t)$ **c.)** $x(t)=\frac{1}{2}\left(2+2t+3t^2\right)$ **d.)** $x(t)=e^{-t}+t$

4 **a.)** 15 **b.)** 170 **d.)** 15