Funções de Várias Variáveis - FVV - Noturno (2008)

Profs. Stilante, Edson

6^a **Lista Mínima de Exercícios**

A. Integrais Iteradas

1. Calcule $\displaystyle\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy$, onde:
   (a) $f(x,y) = xe^{xy}$ e R é o retângulo $1 \le x \le 3$ e $0 \le y \le 1$
   (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ e R é o quadrado $1 \le x \le 2$ e $1 \le y \le 2$
2. Esboçe a região de integração e calcule as integrais iteradas seguintes:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2x} (2x+4y)\,dy\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{ln\,x} \frac{1}{e-e^y}\,dy\,dx$

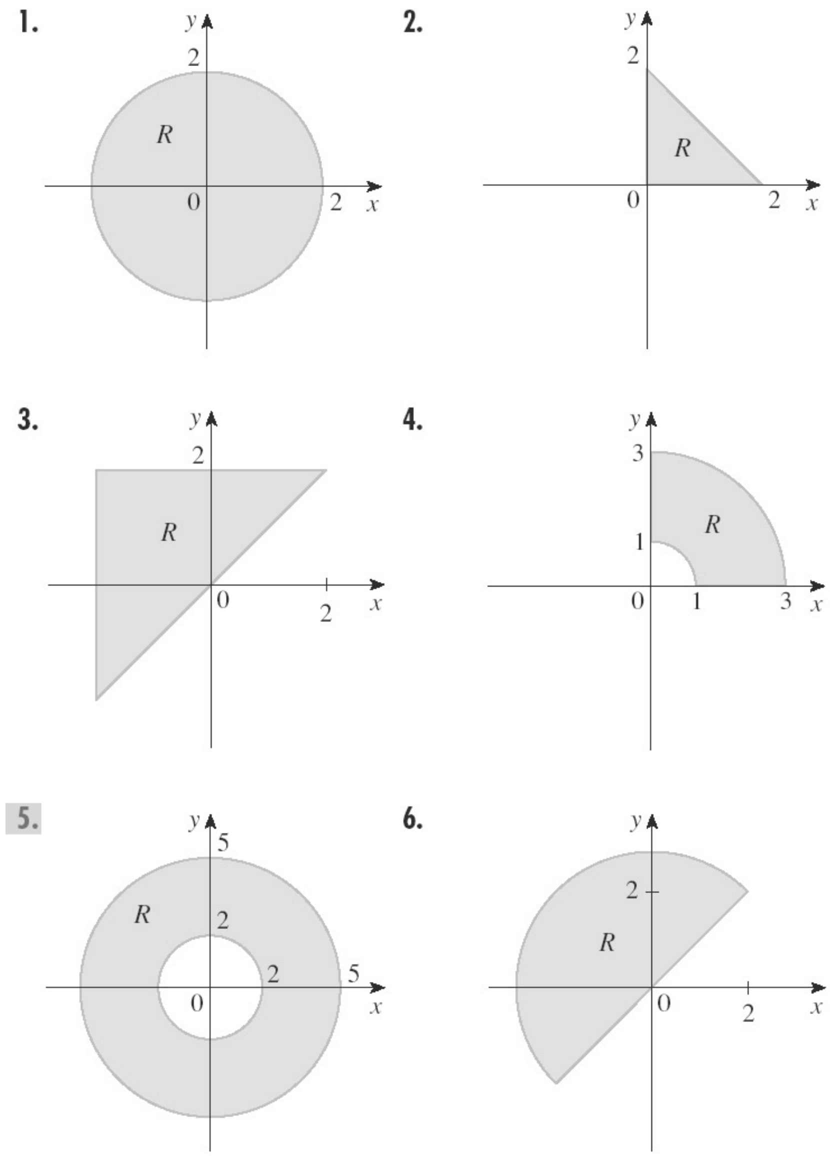
   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\,dy$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy\,dy\,dx$
3. Inverter a ordem de integração:

   (a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy\,dx$
4. Calcule $\displaystyle\int\int_R (8-x-y)\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $y = x^2$ e $y = 4$.
5. Calcule $\displaystyle\int\int_R sen(x)\,sen(y)\,dx\,dy$, onde R é o quadrado $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.
6. Calcule $\displaystyle\int\int_R \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ e $x = 2$.

B. Mudança de Variáveis

1. Usando coordenadas polares, calcule:
   (a) $\displaystyle\int\int_R (x^2+y^2)^2\,dx\,dy$, onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4 \text{ e } x \ge 0\}$.
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$
   (c) $\displaystyle\int\int_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 9$.
   (d) $\displaystyle\int\int_R x\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $x^2+y^2-4x = 0$.
   (e) $\displaystyle\int\int_R xy\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
   (f) $\displaystyle\int\int_R \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\,dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$.
   (g) $\displaystyle\int\int_R dx\,dy$, onde R é a região delimitada por $4(x-3)^2+(y-2)^2 = 4$. Interprete o resultado geometricamente.

2. Uma região R é mostrada em cada um dos gráficos da figura abaixo[1] . Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva os limites de integração da integral iterada $\int\int_R f(x,y)\,dA$, onde f é uma função arbitrária qualquer contínua em R.



C. Aplicações (área e volume)

1. Calcule o volume dos sólidos delimitados pelas superfícies dadas:

   (a) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = x^2 + y^2$. (b) $z = 0$, $x^2 + y^2 = 16$ e $z = 10 + x$.

2. Calcule a área da elipse $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$.

3. Determine a área de região R delimitada pelas curvas $y = x^3, x + y = 2$ e $y = 0$.

[1] Fonte da figura: *Cálculo*, Stewart, 5^a edição, vol. 2, pág. 1006, Cengage Learning.

D. Desafios

1. Calcule $\displaystyle\int\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$, onde D é a região triangular limitada pela reta $x+y=2$ e os eixos coordenados.

2. Prove que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\int_0^1 x^n\,y^n\,dx\,dy=0.$$

3. Calcule a integral dupla
$$I(a)=\int\int_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy,$$
onde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \mid\ x^2+y^2=\frac{1}{a^2}\}$ e mostre que
$$\lim_{a\to+\infty}I(a)=0.$$

E. Respostas

A 1. $(a)\quad e^3-e-2\qquad(b)\quad 10\,ln\,2-6\,ln\,3.$

A 2. $(a)\quad 8/3\qquad(b)\quad 1\qquad(c)\quad 1/3\qquad(d)\quad 1/6.$

A 3. $(a)\quad\displaystyle\int_0^2\int_{2x}^4 f(x,y)\,dy\,dx\qquad(b)\quad\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)\,dx\,dy\qquad(c)\quad\int_0^2\int_{y/3}^{y/2}f(x,y)\,dx\,dy+\int_2^3\int_{y/3}^1 f(x,y)\,dx\,dy$

A 4. $896/15$

A 5. 1

A 6. $9/4$

B 1. $(a)\quad\frac{32\,\pi}{3}\qquad(b)\quad\frac{2\,\pi}{3}\qquad(c)\quad\frac{52\,\pi}{3}\qquad(d)\quad 8\,\pi\qquad(e)\quad 0\qquad(f)\quad\frac{2\,\pi}{3}\qquad(g)\quad 2\,\pi$

C 1. $(a)\quad\frac{\pi}{2}\qquad(b)\quad 160\,\pi.$

C 2. $2\,\pi$

C 3. $\frac{3}{4}$

D 1. $e-e^{-1}$