FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS: LISTA 7

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

(Exercícios adaptados do livro *Cálculo, Volume II* de James Stewart, 5ª edição.)

Integrais Duplas

Exercício 1. Determine a massa de uma lâmina de metal de densidade $\rho(x, y) = xy$ e com o formato representado na Figura 1 (região fechada):

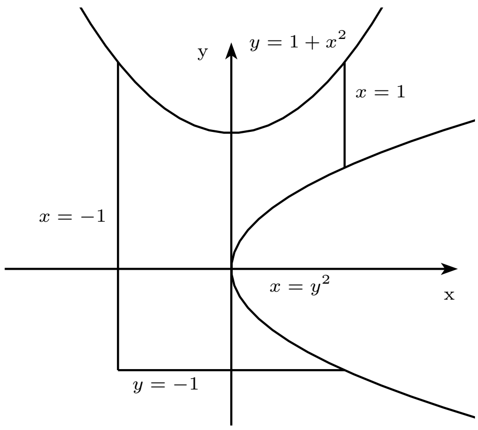

Figura 1. Esboço de uma lâmina de metal

Exercício 2. Determine a área da superfície:

(a) A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante.
(b) A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
(c) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$.
(d) A parte da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2 = ax$ e acima do plano xy.

Integrais Triplas

Exercício 3 (2,0)**.** Calcule as integrais:

(a)
$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xydydxdz$$

(b)
$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2} dxdydz$$

(c) $\iiint_E ydV$ onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$;

(d) $\iiint_E zdV$ onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante.

Exercício 4. Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada e reescreva a integral como uma integral equivalente de dois modos diferentes:

(a)
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dydzdx$$

(b)
$$\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dxdzdy$$

(c)
$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} dydzdx$$

Exercício 5. Faça um esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule tal integral:

(a)
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} rdzdrd\theta$$

(b)
$$\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

Exercício 6. Utilize coordenadas cilíndricas e calcule as integrais:

(a)
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{3/2} dzdydx$$

(b)
$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}dV,$$
onde E é a região contida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$;

(c)
$$\iiint_E xdV,$$
onde E está delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 3$, e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

Exercício 7. Utilize coordenadas esféricas e calcule as integrais:

(a)
$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2) dzdxdy$$

(b)
$$\iiint_H \sqrt{x^2+y^2}dV,$$
onde H é a região hemisférica qie está acima do plano xy e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(c)

$$\iiint_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV,$$

onde E está delimitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=9$ no primeiro octante.

Mudança de Variáveis

Exercício 8. Determine o jacobiano da transformação:
(a) $x = u^2 - v^2$, $y = u^2 + v^2$;
(b) $x = \frac{u}{u+v}$, $x = \frac{v}{u-v}$;
(c) $x = \alpha \sin\beta$, $y = \alpha\cos\beta$;
(d) $x = e^{u-v}$, $y = e^{u+v}$, $z = e^{u+v+w}$.

Exercício 9. Determine a imagem do conjunto S pela transformação dada:
(a) $S = \{(u,v); 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\}$,
$x = 2u + 3v$, $y = u - v$;
(b) S é a região triangular com vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$,
$x = u^2$, $y = v$;
(c) S é o disco dado por $u^2 + v^2 \le 1$,
$x = au$, $y = bv$

Exercício 10. Utilize a transformação dada para calcular a integral:
(a)

$$\iint_R (x - 3y) dA,$$

onde R é aregião triangular de vértices $(0,0)$, $(2,1)$ e $(1,2)$,
$x = 2u + v$, $y = u + 2v$;
(b)

$$\iint_R x^2 dA,$$

onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$,
$x = 2u$, $y = 3v$;
(c)

$$\iint_R xy dA,$$

onde R é aregião do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$ e $xy = 3$,
$x = u/v$, $y = v$.

Exercício 11. Calcule a integral fazendo uma mudança de variáveis apropriada:
(a)

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y} dA,$$

onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$, e $3x - y = 8$;
(b)

$$\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA,$$

onde R é a região trapezoidal com vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ e $(0,1)$;

(c)

$$\iint_R e^{x+y} dA,$$

onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$.