Funções de Varias Variáveis - FVV - Noturno (2008)

Profs. Stilante, Edson

2^a **Lista Mínima de Exercícios** - Limites e Continuidade

A. Limites

1. Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} (x^3y + x^2y^3 + 4)$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}}{x+1}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{cos\,(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$ (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\, tg\,(x)}{x^2+y^2}$

(j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{xy+x}$ (k) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt[3]{xy}-1}{\sqrt{xy}-1}$ (l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\, sen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

2. (a) Mostre que o valor de $\dfrac{x^3y}{2x^6+y^2}$ tende a 0 quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$, ou ao longo de qualquer parábola $y = k\,x^2$.

   (b) Mostre que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$$
   não existe, tomando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo da curva $y = x^3$.

3. Utilize coordenadas polares para determinar o limite [*Se* (r,θ) *são as coordenadas polares, o ponto* (x,y) *com* $r \geq 0$, *note que* $r \to 0^+$ *quando* $(x,y)\to(0,0)$.]

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)}$ (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\, ln\,(x^2+y^2)$

B. Continuidade

1. Esboçe o maior conjunto no qual a função f é contínua

(a) $f(x,y) = y\, ln\,(1+x)$ (b) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ (d) $f(x,y) = ln\,(x^2+y^2-4)$

(e) $f(x,y) = arcsen\,(xy)$ (f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y^3}{2x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Encontre o valor de **a** para que a função dada seja contínua em $(0,0)$:

– (a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,sen\left(\dfrac{1}{xy}\right) & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \mathbf{a} & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

– (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \mathbf{a} - 4 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

– (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\,sen(x)cos(y)}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \mathrm{a}^2 - 4\mathbf{a} - 5 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

C. Vários

1. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(2x) - 2x + y}{x^3+y}$? (Justifique sua resposta !)

2. Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(xy)}{xy} = 1.$

3. É possível redefinir a função $\dfrac{sen(x+y)}{x+y}$ no ponto $(0,0)$, de tal modo que ela seja contínua ?

4. Mesma pergunta que o exercício anterior para a função $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

5. Calcule $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - 2xh - k}{\sqrt{h^2+k^2}}$, onde $f(x,y) = x^2 + y$.

6. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

D. Desafio

Seja $f : D \subset R^2 \to R$ definida por $f(x,y) = 1$, onde $D = B_1(0,0) \cup \{(1,0)\}$. Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 1.$$

Lembre que, $B_1(0,0) = \{(x,y) \in R^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$ é o disco aberto de raio unitário centrado na origem.