Funções de Varias Variáveis - FVV - Noturno (2008)

Profs. Stilante, Edson

3^a **Lista Mínima de Exercícios**

A. Derivadas Parciais

1. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ para as seguintes funções:

(a) $f(x,y) = x\,cos(x)cos(y)$ (b) $f(x,y) = (x^2+y^2)\,ln\,(x^2+y^2)$ (c) $f(x,y) = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(d) $f(x,y) = x^y$ (e) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^2+3}$ (f) $f(x,y) = \dfrac{x\,sen\,(y)}{cos(x^2+y^2)}$

2. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ para as seguintes funções:

(a) $f(x,y,z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$ (b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ (c) $f(x,y,z) = y\,e^x\,sen\,(xz)$

3. Encontre as derivadas parciais indicadas.

(a)$z = ln\sqrt{1+x\,y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,2)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ (b)$z = e^{ax}\,cos(bx+y)$; $z_y(2\pi/b, 0)$

4. Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$. Mostre que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

B. Diferenciabilidade

1. Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis em $(0,0)$

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = x^{1/3}\,cos\,(y)$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

C. Vários

1. Encontre o ponto onde, o plano tangente à superfície de equação $z = e^{x-y}$ no ponto $(1,1,1)$, corta o eixo z.

2. Determine a aproximação linear da função $f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2,1)$, e use-a para aproximar $f(1.95, 1.08)$.

3. Encontre uma aproximação linear para:

(a) $(0.99\,e^{0.02})^8$ (b) $(0.99)^3 + (2.01)^3 - 6(0.99)(2.01)$

(c) $\sqrt{(4.01)^2 + (3.98)^2 + (2.02)^2}$

D. Regra da cadeia

1. Sejam $z = y\,e^x + x\,e^y$, $x = cos(t)$, $y = sen(t)$. Determine $\frac{dz}{dt}$ de dois modos:

   $a)$ usando a regra da cadeia; $b)$ determinando a função composta $z(t)$ e derivando em relação a t.

2. Suponha que $z = f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(4, 8)$ com $f_x(4, 8) = 3$ e $f_y(4, 8) = -1$. Se $x = t^2$ e $y = t^3$, encontre $\dfrac{dz}{dt}$ para $t = 2$.

3. Sejam $\varphi(x, y) = x^2y - xy^3 + 2$; $x = r\,cos\,(\theta)$, $y = r\,sen\,(\theta)$. Encontre $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$.

4. Sejam $f(x, y) = x^2y^2 - x + 2y$; $x = \sqrt{u}$, $y = uv^3$. Encontre

$$\frac{\partial f}{\partial u}|_{u=1,\,v=-2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial v}|_{u=1,\,v=-2}.$$

5. Seja f uma função diferenciável de uma variável e seja $z = f(x^2 + y^2)$. Mostre que $y\,z_x - x\,z_y = 0$.

6. Seja f uma função de uma variável e seja $w = f(u)$, onde $u = x + 2y + 3z$. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 6\frac{dw}{du}$$

7. Seja $f(x - y, y - x)$. Mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

8. Seja $\phi : R \to R$ uma função diferenciável tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$.

E. Desafios

1. Determine uma função $f(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \dfrac{y}{y^2 + 1}$.

2. A função $y = f(x)$ é definida *implicitamente* pela equação $F(x, y) = 0$ se para todo $x \in D_f$ temos $F(x, f(x)) = 0$. Mostre que se f e F são diferenciáveis, então:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \qquad \text{se} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

3. Seja $z = f(x, y)$ definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ para todo todo $(x, y) \in D_f$. Mostre que se f e F são diferenciáveis, então:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \qquad \text{se} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

4. Use o exercício anterior para determinar a equação do plano tangente, no ponto $(1, 3, 2)$, à superfície de equação

$$z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 13.$$