Funções de Varias Variáveis - FVV - Noturno (2008)

Profs. Stilante, Edson

4^a **Lista Mínima de Exercícios**

A. Gradiente e Derivada Direcional

1. Esboçe a curva de nível de $f(x, y)$ que passa por P e desenhe o vetor gradiente em P:

   (a) $f(x, y) = y/x^2, \quad P = (-2, 2)$ (b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad P = (-2, 0)$

   (c) $f(x, y) = x^2 - y^2, \quad P = (2, -1)$

2. Considere a superfície $xz - yz^3 + yz^2 = 2$

   (a) Determine a equação do plano tangente à superfície no ponto $(2, -1, 1)$.

   (b) Determine as equações paramétricas da reta que é normal à superfície no ponto $(2, -1, 1)$.

3. Determine a derivada direcional de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$:

   (a) $f(x, y) = sen(x)\, cos(y), \quad P = (\pi/3, -2\pi/3), \quad \mathbf{u} = (2, 3)$

   (b) $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}, \quad P = (2, -1, -2), \quad \mathbf{u} = (1, 2, -2)$.

4. Determine a derivada direcional máxima de f em P e a direção em que isto ocorre:

   (a) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2, \quad P = (1, 5, -2)$

   (b) $f(x, y, z) = \sqrt{xy^2z^3}, \quad P = (2, 2, 2)$.

5. Suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 2) = -5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 2) = 10$, onde $\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $\mathbf{v} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Determine:

   (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

   (c) a derivada direcional de f em $(1, 2)$ na direção e sentido da origem.

B. Derivadas Parciais de Ordem Superior

1. Determine f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy} para cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$ (b) $f(x, y) = sen(x^2 - 3xy)$ (c) $f(x, y) = x^2y^2e^{2xy}$.

2. Seja $f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (a) Se $(x, y) \neq (0, 0)$ calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

   (b) Mostre que $(\partial f/\partial x)(0, 0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0, 0)$.

   (c) $(\partial^2 f/\partial x\, \partial y)(0, 0) = 1$ e $(\partial^2 f/\partial y\, \partial x)(0, 0) = -1$.

   (d) O que aconteceu ? Porque as derivadas mistas não são iguais ?

3. Dados $z = 3xy - 4y^2, \quad x = 2se^r, \quad y = re^{-s}$. Determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\, \partial r}$ de duas maneiras:

   (a) expressando z em termos de r e s; (b) usando a regra da cadeia.

4. Uma função $w = f(x, y, z)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a *Equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

é chamada *hârmonica*. Quais das funções abaixo são harmônicas ?

(a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ (b) $f(x, y) = e^x\, sen(y) + e^y cos(x)$ (c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

5. Determine o maior conjunto aberto no qual $f_{xy} = f_{yx}$

(a) $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y$ (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ (c) $f(x, y) = sen(x^2 + y^2)$

C. Vários

1. Se o *potencial elétrico* em um ponto (x, y) do plano xy é $V(x, y)$ então o *vetor campo elétrico* no ponto (x, y) é $\mathbf{E} = -\nabla V$. Suponha que $v(x, y) = e^{-2x}cos(2y)$.
   - (a) Determine o valor do campo elétrico em $(\pi/4, 0)$.
   - (b) Mostre que, em cada ponto no plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e sentido do vetor $\mathbf{E}$.
2. A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

onde c é uma constante positiva, é chamada *equação da onda*. Sejam f e g funções diferenciáveis de uma variável.

   - (a) Mostre que $u(x, y) = f(x + ct)$ e $v(x, t) = g(x - ct)$ satisfazem a equação da onda.
   - (b) Mostre que uma função da forma $\phi(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação da onda.
   - (c) Confirme que $\phi(x, t) = sen(t)\, sen(x)$ satisfaz a equaç ão da onda com $c = 1$, e então use identidades trigonométricas apropriadas para expressar essa função na forma $f(x+t)+g(x-t)$.

D. Desafios

1. O Capitão Astro está outra vez em perigo perto da órbita de Mercúrio. Ele está na posição $P_0 = (1, 1, 1)$, e temperatura da blindagem de sua espaçonave num ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2} \qquad \text{graus.}$$

   - (a) Que direção ele deve tomar para perder temperatura o mais rápido possível ?
   - (b) Se a espaço nave viaja a e^8 unidades de comprimento por segundo, com que taxa a temperatura irá cair quando ele seguir a direção do item (a) ?
   - (c) Infelizmente, a blindagem da espaçonave se danificará se a taxa de variação da temperatura for inferior a $\sqrt{14}\, e^2$ graus/s. Que conjunto de possíveis direções ele pode tomar sem causar danos à sua espaçonave, a partir de P_0, com a velocidade do item (b).
2. Se u e v são funções de x e y, de classe C^2, e satisfazem as *equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

mostre que u e v são harmônicas.