Funções de Varias Variáveis - FVV - Noturno (2008)

Profs. Stilante, Edson

5^a **Lista Mínima de Exercícios**

A. Máximos e Mínimos

1. Determine e classifique os pontos críticos das funções abaixo relacionadas:

   (a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5$ (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$

   (c) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 12x + 10$ (d) $f(x,y) = x\,y\,e^{-x^2-y^2}$

2. Encontre o máximo e mínimo global de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = sen(x) + sen(y) + sen\,(x+y); \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

   (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, na região triangular de vértices $(0,0), (0,1), (1,0)$.

   (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}, \quad |x| \leq 1,\ |y| \leq 1.$

3. Foi encomendado para sua empresa o projeto de um tanque para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente pedem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas que contenha $8.000\,m^3$ de gás. O cliente também quer usar a menor quantidade possível de material para construir o tanque. Qual raio e altura da parte cilíndrica você recomendaria para o tanque?

   Resposta: $h = 0$ e $R = 10 \cdot \sqrt[3]{6/\pi} \cong 12,4\,m$.

4. Determine o volume máximo de uma caixa retangular inscrita no elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

   Resposta: $V = \dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$

5. De uma folha de alumínio com $12\,cm$ de largura, deseja-se construir uma calha, dobrando-se os lados da folha para cima e formando duas abas de mesmo tamanho, de modo que estas abas façam o mesmo ângulo com a horizontal. Qual a largura das abas e que ângulo elas devem fazer com a horizontal, a fim de que a capacidade da calha seja máxima ?

   Resposta: $L = 4\,cm$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ *radianos.*

B. Máximos e Mínimos com Restrição (Vínculo)

1. Determine os valores máximo e mínimo, se existem, das funções abaixo relacionadas sujeitas ao respectivo vínculo indicado:

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 4$

   (b) $f(x,y) = x\,y, \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$

   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad 3x + 2y + z = 6$

   (d) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

2. A janela de uma casa tem a forma de um retângulo com um triângulo isósceles no topo. Se o perímetro da janela é $12\,m$ e esta deve coletar a maior quantidade de energia solar possível, mostre que o ângulo da base do triângulo é $\frac{\pi}{6}$ radianos.

3. Determine a equação do plano que passa por $(1,2,1)$ e determina com os planos coordenados um tetraedro de volume máximo. *Resposta:* $2x+y+2z=6$.

4. Suponha que a temperatura em um ponto (x,y) de uma placa de metal seja $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$. Uma formiga, andando sobre a placa, percorre um círculo de raio 5 centrado na origem. Qual é a maior e a menor temperatura encontrada pela formiga ? *Resposta:* 125^o *nos pontos* $(2\sqrt{5},-\sqrt{5})$ *e* $(-2\sqrt{5},\sqrt{5})$, 0^o *nos pontos* $(\sqrt{5},2\sqrt{5})$ *e* $(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$

5. Considere a curva C interseção do cilindro de equação $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$ com o plano $2x+y+z=12$. Determine as distâncias máxima e mínima dos pontos de C ao plano xy. *Resposta:* 20 e 4.

C. Desafios

1. Numa circunferência de raio R, traçam-se duas cordas paralelas, uma acima e outra abaixo do centro, e constrói-se um trapézio isósceles. Determinar as distâncias das duas cordas ao centro, para que a área do trapézio seja máxima. *Resposta: Distâncias iguais a* $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

2. Determine os valores máximo e mínimo, se existem, da função $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, sujeita aos respectivos vínculos $x+y+z=1$ e $x+2x+3z=6$.

3. Se f for uma função contínua de uma variável com dois máximos relativos num intervalo, então deve haver um mínimo relativo entre eles. Este resultado não se estende a funções de duas variáveis. De fato, mostre que $f(x,y)=4x^2e^y-2x^4-e^{4y}$ tem dois máximos relativos, mas nenhum outro ponto crítico.

D. Respostas

A 1. (a) mín global $(-1,2)$

(b) máx local $(-1,-1)$, pto de sela $(0,0)$

(c) pto de sela $(-1,0)$, mín local $(2,0)$

(d) pto de sela $(0,0)$, mín local $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, mín local $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, máx locais $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

A 2. (a) máx $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ em $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, mín 0 em $(0,0)$

(b) máx em $(0,1)$ e $(1,0)$, mín $-\frac{1}{2}$ em $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

(c) máx e^3 em $(1,1)$ e $(-1,1)$, mín $e^{-\frac{1}{4}}$ em $(0,-\frac{1}{2})$

B 1. (a) máx 4 em $(\pm 2,0)$, mín -4 em $(0,\pm 2)$

(b) máx 3 em $(\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$ e $(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$, mín -3 $(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$ e $(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$

(c) mín $\frac{18}{7}$ em $(\frac{9}{7},\frac{6}{7},\frac{3}{7})$

(d) máx 7 em $(\frac{36}{7},\frac{9}{7},\frac{4}{7})$ e mín -7 em $(-\frac{36}{7},-\frac{9}{7},-\frac{4}{7})$

C 2. mín 25/3 em $(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3})$