NOTAS DE AULA

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS - DIFERENCIAÇÃO

Cláudio Martins Mendes

Segundo Semestre de 2005

Sumário

1 Funções de Várias Variáveis - Diferenciação **2**

1.1 Noções Topológicas no $\mathbb{R}^n$ 2

1.2 Funções - Limites - Continuidade 11

1.2.1 Definição 11

1.2.2 Gráficos 14

1.3 Curvas e Superfícies de Nível 16

1.4 Funções Limitadas 19

1.5 Limites 22

1.6 Continuidade 28

1.7 Derivadas Parciais e Funções Diferenciáveis 34

1.7.1 Derivadas Parciais 34

1.7.2 Derivadas parciais de ordem superior 37

1.7.3 Diferenciabilidade 40

1.7.4 Regras da Cadeia 52

1.7.5 Gradiente - Curva de Nível - Superfície de Nível 57

1.7.6 Derivada Direcional 65

1.8 Teoremas: Valor Médio e Taylor 74

1.9 Máximos e Mínimos 82

1.10 Máximos e Mínimos Condicionados 98

Capítulo 1

Funções de Várias Variáveis - Diferenciação

1.1 Noções Topológicas no $\mathbb{R}^n$

Consideremos $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Associamos ao ponto P um número real chamado sua *norma*, definido por:

$$\|P\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$$

Se $P \in \mathbb{R}^2$, então $\|P\| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, que é reconhecida com "*distância*" do ponto P à origem, ou seja, o comprimento do vetor associado a P .

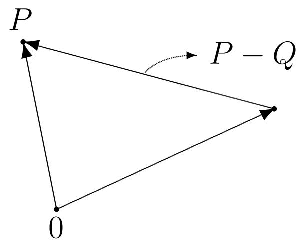
Analogamente, para $P \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}^3$, etc...

Usamos agora a definição de norma para definir distância no $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a *distância* entre os pontos P e Q é dada por $\|P - Q\|$.

Se $P = (x_1, \dots, x_n)$ e $Q = (y_1, \dots, y_n)$, então

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right]^{1/2}$$

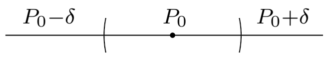
Observação: Esta é a *distância euclidiana.* Observamos que, além deste, há outros conceitos de distância.

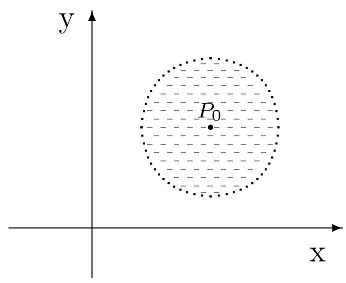


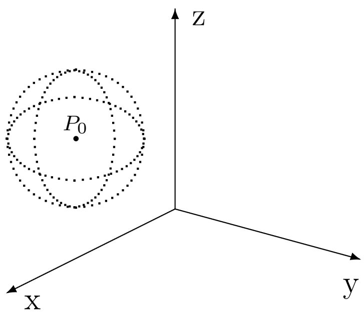
Ao espaço $\mathbb{R}^n$, com esta distância, costumamos chamar de *ESPAÇO EUCLIDIANO*.

Definição 1.1.1. *Chama-se* ***bola aberta*** *de centro* $P_0 \in \mathbb{R}^n$ *e raio* $\delta > 0$*, ao seguinte conjunto:*

$$B(P_0, \delta) = \{P \in R^n \mid d(P, P_0) < \delta\}$$







Chama-se ***bola fechada*** de centro $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\delta > 0$ ao conjunto

$$\overline{B}(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid d(P, P_0) \leq \delta\}$$

Chama-se ***esfera*** de centro $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\delta > 0$, ao conjunto

$$S(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid d(P, P_0) = \delta\}$$

Observação: Uma bola aberta de centro P_0 e raio $\delta > 0$ também será chamada uma ***vizinhança de raio*** δ ***do ponto*** P_0.

Notação: $V_\delta(P_0)$

Dado um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, qualquer, todo ponto do $\mathbb{R}^n$ tem uma das propriedades:

(a) dizemos que P é **ponto interior** a S, se existe $\delta > 0$ tal que $B(P,\delta) \subset S$.

(b) dizemos que P é **ponto exterior** a S, se existe $\delta > 0$ tal que $B(P,\delta)$ não contém qualquer elemento de S, isto é, $B(P,\delta) \cap S = \emptyset$;

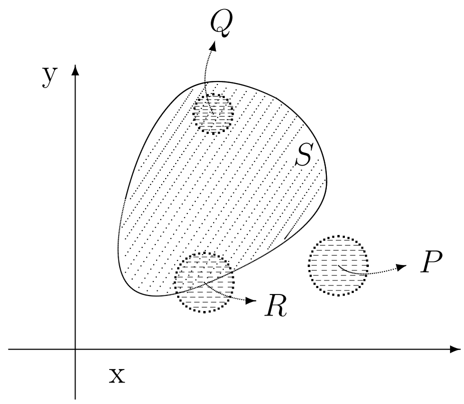
(c) dizemos que P é **ponto fronteira** de S, quando P não é interior nem exterior a S, isto é, $\forall\, \delta > 0$, $B(P,\delta)$ contém pontos de S e pontos que não são de S.

Exemplos:

(1) P é exterior a S

Q é interior a S

R é fronteira de S

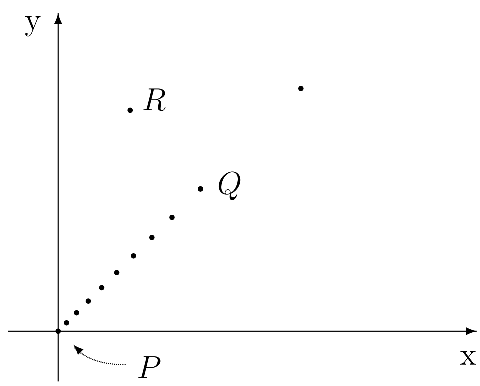


(2) $S = \left\{ \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \right),\ n \in N \right\}$

P é ponto fronteira de S

Q é ponto fronteira de S

R é ponto exterior a S



Definição 1.1.2. *Seja $A \subset R^n$. Dizemos que A é **aberto**, se todo ponto de A for interior a A, isto é, $\forall\, P \in A,\ \exists\, \delta > 0$ tal que $B(P,\delta) \subset A$.*

Exemplos:

1. $\mathbb{R}^n$ é aberto no $\mathbb{R}^n$

2. $A = \{P \in \mathbb{R}^2 \; ; \|P\| < 1\}$ é aberto em $\mathbb{R}^2$.

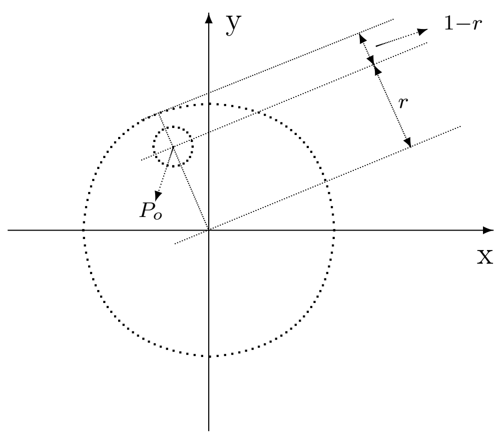
   De fato:

   Seja $P_0 \in A$. Logo $\|P_0\| = r < 1$

   Consideremos $B\left(P_0\,,\, \dfrac{1-r}{2}\right)$

   Mostremos que $B\left(P_0\,,\, \dfrac{1-r}{2}\right) \subset A$

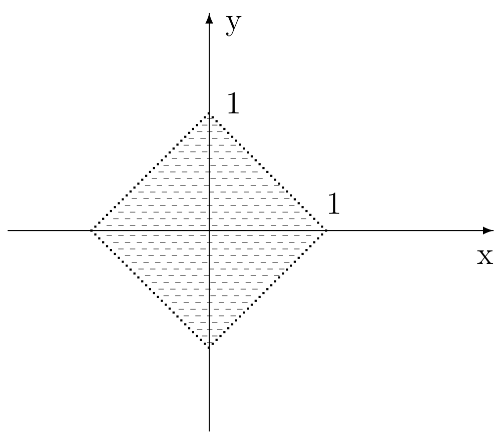
$$P \in B\left(P_0\,,\, \frac{1-r}{2}\right) \Longrightarrow \|P\| \begin{array}[t]{l} = \|P - P_0 + P_0\| \leq \|P - P_0\| + \|P_0\| = \\ = \|P - P_0\| + r < \dfrac{1-r}{2} + r < 1\ . \end{array}$$



3. Qualquer $B(P_0, \delta)$ é um conjunto aberto no $\mathbb{R}^n$.

4. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x| + |y| < 1\}$

C é aberto



5. $C \cup \{(0,1)\}$ **não é** aberto.

Observação: Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto dos pontos interiores a A é chamado **interior** de A e é denotado por $\text{int } A$ ou $\mathring{A}$.

Analogamente, $\text{ext } A$ ou $\text{front } A$.

Definição 1.1.3. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que P é um **ponto de acumulação** de A, se qualquer vizinhança de P contém um ponto de A, diferente de P.*

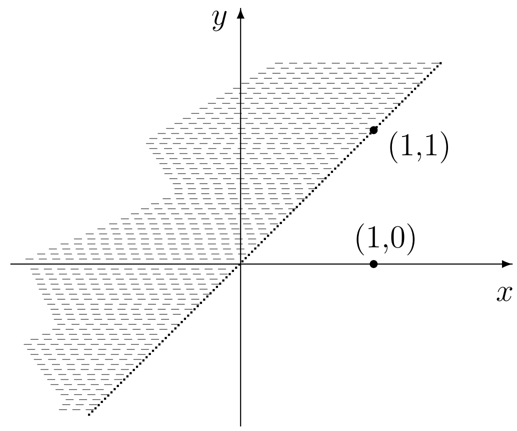
Exemplos:

1. Todo ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação do $\mathbb{R}^n$.

2. Nenhum ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação do conjunto $\emptyset$.

3. $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
   O conjunto dos pontos de acumulação de A é: $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

4. $A = \{(x,y) \mid y > x\} \cup \{(1,0)\}$
   $(1,0) \in A$ mas **não é** ponto de acumulação de A.
   $(1,1) \notin A$ mas **é** ponto de acumulação de A.



   Conjunto dos pontos de acumulação de A: $\{(x,y) \mid y \geq x\}$.

5. $A = \left\{ \left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n} \right) \mid n \in N \right\}$

   Observe que $(0,0) \notin A$ e que $(0,0)$ é o **único** ponto de acumulação de A.

Exercício: Mostre que se P é ponto de acumulação de um conjunto A, então toda $B(P, \delta)$ contém infinitos pontos de A.

Conclua disto que um conjunto finito não pode ter pontos de acumulação.

Definição 1.1.4. *Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que P é um* ***ponto isolado*** *de A se $P \in A$ e P* ***não*** *é ponto de acumulação de A.*

Exemplos:

1. Vide exemplo (4) da definição 3:
   (1,0) é ponto isolado de A
   (2,1) não é ponto isolado de A (não pertence a A).

2. Vide exemplo (3) da definição 3:
   O conjunto A não tem pontos isolados.

Definição 1.1.5. *Um conjunto A é* ***fechado*** *se todo ponto de acumulação de A pertence a A.*

Exemplos:

1. $\mathbb{R}^n$ é fechado

2. $\emptyset$ é fechado

3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ não é fechado

4. Vide exemplo (4) da definição 3: A não é fechado

5. Vide exemplo (5) da definição 3: A não é fechado

Exercícios:

1. Prove que todo conjunto finito é fechado.

2. O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ é fechado em $\mathbb{R}^2$?

Observação: Na linguagem comum as palavras ***aberto*** e ***fechado*** são exclusivas e totalizantes. Tal fato não ocorre aqui, como mostram os exemplos abaixo:

conjuntos	aberto	fechado
$\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$	sim	não
conjunto finito	não	sim
$\left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$	não	não
$\mathbb{R}^2$	sim	sim

Teorema 1.1.6. *Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.*

Prova:

$(\longrightarrow)$ Seja F - conjunto fechado

$\forall\, P \in \mathcal{C}F \Leftrightarrow P \notin F$ (fechado) $\Rightarrow$ P **não** é ponto de acumulação de $F \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $B(P,\delta) \subset \mathcal{C}F$. Portanto $\mathcal{C}F$ é aberto.

$(\longleftarrow)$ Seja $\mathcal{C}F$ - conjunto aberto

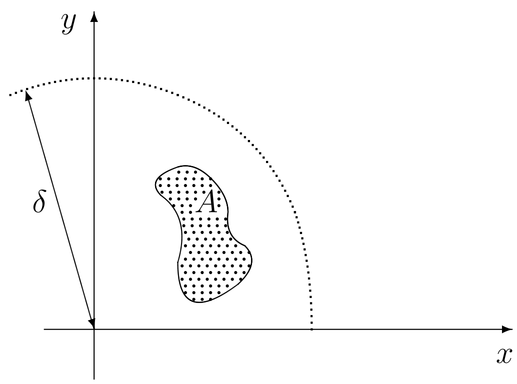
Consideremos P um ponto de acumulação qualquer de F. Mostremos que $P \in F$.

Suponhamos que $P \notin F \Rightarrow P \in \mathcal{C}F$ (aberto).

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ tal que $B(P,\delta) \subset \mathcal{C}F \Rightarrow P$ não é ponto de acumulação de F (contra hipótese).

Logo $P \in F$ e assim F é fechado.

Definição 1.1.7. *$A \subset \mathbb{R}^n$ é dito **limitado** se existe $\delta > 0$ tal que $A \subset B(0,\delta)$.*



Exemplos:

1. Qualquer $B(P, \delta)$ é um conjunto limitado

2. $\{(1, m) \mid m \in N\}$ não é limitado

3. $\{(\operatorname{sen} x\,, \cos x) \mid x \in R\}$ é limitado. Desenhe-o.

Vamos agora enunciar um dos resultados básicos do Cálculo, que garante a existência de pontos de acumulação. Para a prova, o leitor pode consultar o livro: Advanced Calculus, Buck, pg. 38 .

Teorema 1.1.8 (Bolzano-Weierstrass). *Todo subconjunto infinito e limitado do $\mathbb{R}^n$ tem pelo menos um ponto de acumulação.*

Definição 1.1.9. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se diz **compacto** quando é fechado e limitado.*

Exemplos:

1. Todo conjunto finito é compacto

2. Toda bola fechada do $\mathbb{R}^n$ é compacta

3. $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é compacto

Definição 1.1.10. *Uma coleção $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de conjuntos abertos é chamada uma **cobertura aberta** ou um **recobrimento aberto** do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$.*

Exemplos:

1. $\{B(0, n)\}_{n \in N}$ cobertura aberta do $\mathbb{R}^n$

2. $\{B(P, 1)\}_{P \in \mathbb{Z}^n}$ cobertura aberta do $\mathbb{R}^n$

3. $\{B(P, \frac{1}{2})\}_{P \in \mathbb{Z}^n}$ não é cobertura aberta do $\mathbb{R}^n$ mas é de $\mathbb{Z}^n$

Definição 1.1.11. *Seja Ω uma cobertura de $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma subcoleção Ω' de Ω é dita uma **subcobertura** de A relativamente a Ω se Ω' ainda é cobertura de A .*

Observação: Se o número dos conjuntos na subcobertura é finito ela é dita **subcobertura finita**.

Exemplo:

1. $\{B(0,n)\}_{n\in N}$ cobertura do $\mathbb{R}^n$

   $\{B(0,n)\}_{n\in 2N}$ subcobertura do $\mathbb{R}^n$ relativa a cobertura acima

Uma caracterização de grande valor teórico dos conjuntos compactos (cuja prova pode ser encontrada em Advanced Calculus, Buck, pg. 39) é a seguinte:

Teorema 1.1.12 (Heine-Borel). *Toda cobertura aberta de um conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ admite uma subcobertura finita.*

Exercícios 1.1:

1. Se A e B são conjuntos fechados, mostre que $A \cap B$ e $A \cup B$ são também fechados.

2. Esboce os seguintes conjuntos:

   $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ \max\{|x|,|y|\} < 1\}$

   $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ |x| + |y| < 1\}$

3. Pense e veja se concorda:

   (i) O conjunto $\{x \in R \ \mid \ 0 < x < 1\}$ é aberto;

   (ii) O conjunto $\{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ 0 < x < 1\}$ não é aberto;

   (iii) Qualquer plano **não** é aberto no $\mathbb{R}^3$.

4. Qual é a fronteira do conjunto

   $$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x,y \in \mathbb{Q}\}$$

   Observe que $\mathbb{R}^2 - P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ (x,y) \notin P\}$ não é um conjunto aberto.

5. Determine os pontos de acumulação, a fronteira e o interior dos seguintes conjuntos:

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \geq 0\}$

   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ |x| = |y|\}$

   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x,y \in \mathbb{Z}\}$

   (d) $\mathbb{R}^3$

(e) $\{(x,y) \mid x^2 - y^2 \geq 1\}$

(f) $\left\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \mid m,n \in \mathbb{N}\right\}$. Esboce o conjunto.

(g) $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$

6. Citar as propriedades que se aplicam a cada um dos conjuntos do exercício anterior, dentre as seguintes: aberto, fechado, limitado, finito.

7. Seja S o conjunto de todos os pontos (x,y) tais que $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ e $x > 0$. Determine $\overset{\circ}{S}$. S é fechado? Determine $\operatorname{front} S$.

8. Considere $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1 \quad \textbf{ou} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 1\}$. Determine $\overset{\circ}{S}$. S é fechado?

9. Justifique porque **não** se pode aplicar o teorema de Heine-Borel aos seguintes conjuntos e respectivos recobrimentos:

$A = [a,b] \times [c,d]$ $\{S_y\}_{y \in [c,d]}$ onde $S_y = [a,b] \times \{y\}$	$A = \mathbb{R}^2$ $\{V_\delta(0)\}_{\delta \in N}$	$A = V_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ $\{V_r(0)\}_{0<r<1}$

10. Mostre que um ponto fronteira de S que não está em S é um ponto de acumulação de S.

11. Determine um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ com exatamente três pontos de acumulação. Será possível conseguir um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ com exatamente três pontos interiores?

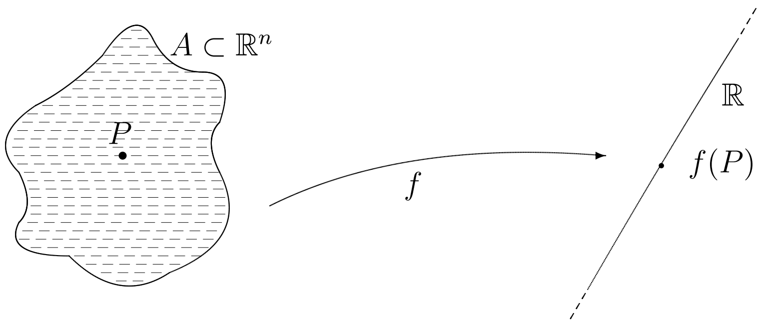
12. Prove que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ que não tenha pontos de acumulação não tem pontos interiores.

1.2 Funções - Limites - Continuidade

1.2.1 Definição

Definição 1.2.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma **função** f definida em A com valores em $\mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada ponto de A um e um só número real.*

Os pontos de A são chamados **variáveis independentes**.



Notação: $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

O conjunto A é chamado **domínio de $\boldsymbol{f}$**.

O conjunto $B = \{f(P) \mid P \in A\}$ é chamado **imagem de $\boldsymbol{f}$** e denotado por $Im(f)$.

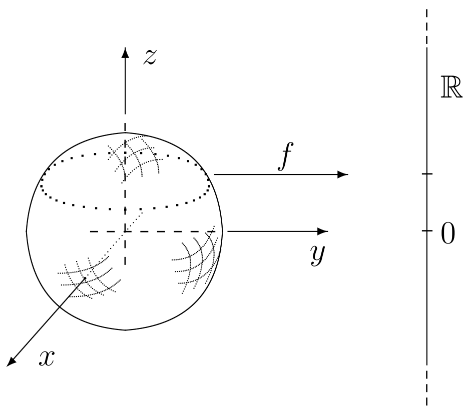
Observação: Durante o curso de Cálculo I estudamos funções $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Generalizações deste conceito podem ser feitas das mais diversas maneiras. Por exemplo, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\ell : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, etc.
Todos estes casos aparecerão durante o curso, mas em especial estaremos trabalhando com $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mais particularmente com $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exemplos:

1. $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

   $f(x, y, z) =$ altura em relação ao plano xy

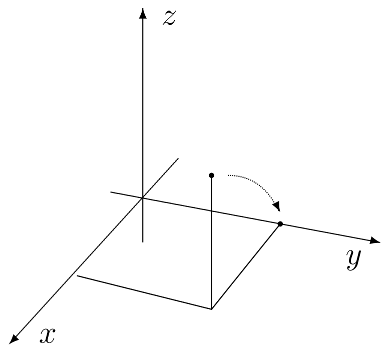
   $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



2. $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

   $(x_1, \ldots, x_n) \to x_i$ Chamada **i-ésima projeção**.

   Por exemplo, $n = 3$ e $i = 2$, $(x, y, z) \to y$.



Exercício: Encontre o domínio da função dada por $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x - y^2}}$.

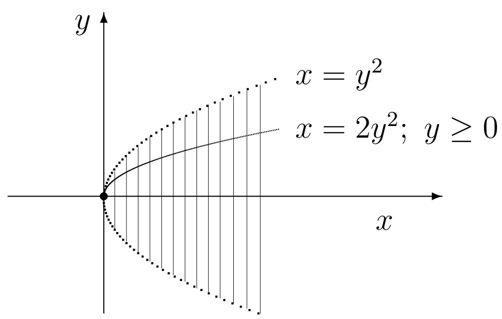
Encontre também os pontos (x, y) para os quais $f(x, y) = 1$.

Resolução:

A expressão só faz sentido nos pontos (x, y) tais que $x - y^2 > 0$ ou seja $x > y^2$.

Ainda: $f(x, y) = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{x - y^2} \Leftrightarrow y^2 = x - y^2,\ y \geq 0 \Leftrightarrow x = 2y^2,\ y \geq 0$.

A seguir representamos o domínio de f e os pontos onde $f(x, y) = 1$.



Observação: Analogamente como feito para função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podemos definir, ponto a ponto, a soma, o produto, a divisão de duas funções $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Por exemplo: a função soma $f + g$ é definida por: $(f + g)(P) = f(P) + g(P),\ \forall\, P \in A$.

1.2.2 Gráficos

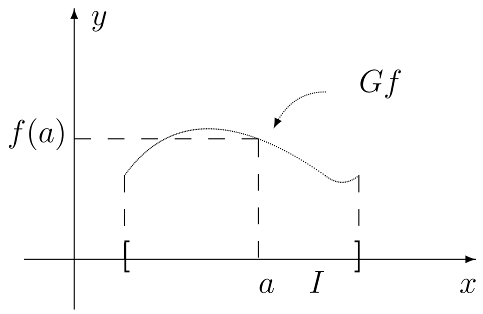
Definição 1.2.2. $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Chama-se* ***gráfico de f*** *ao subconjunto do* $\mathbb{R}^{n+1}$ *definido por*

$$G_f = \{(P, f(P)) \mid P \in A\}.$$

Observação: Como o gráfico é um subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$ e no papel podemos representar até o $\mathbb{R}^3$ então podemos desenhar o gráfico de funções de no máximo duas variáveis, isto é, $n = 2$.

Exemplos:

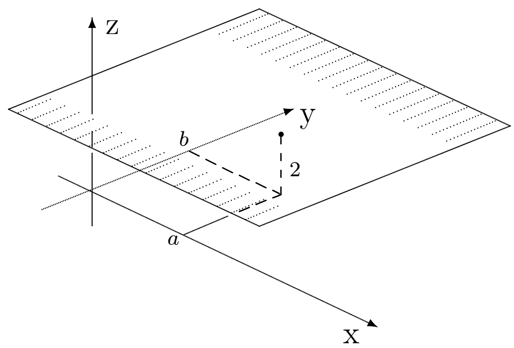
(1) $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(P) = 2$

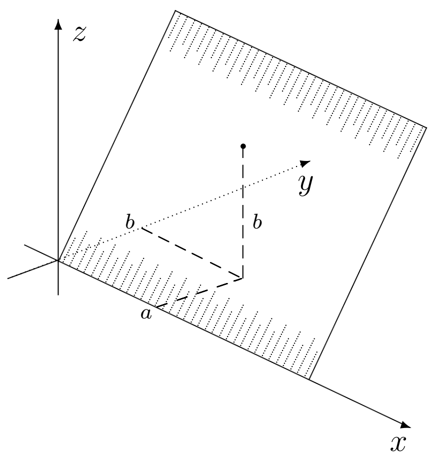
$G_f = \{(x, y, 2) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$



(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to y$

$G_f = \{(x, y, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

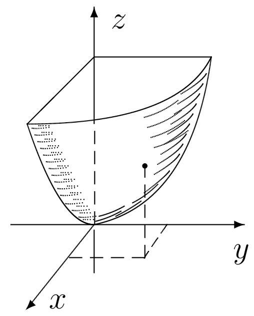


(4) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to x^2 + y^2$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$

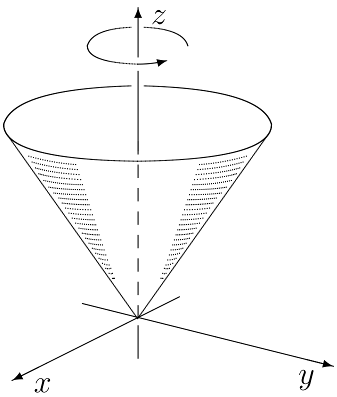
$G_f = \{(x, y, x^2 + y^2) \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$



(5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(P) =$ distância de P ao ponto (0,0), ou seja,

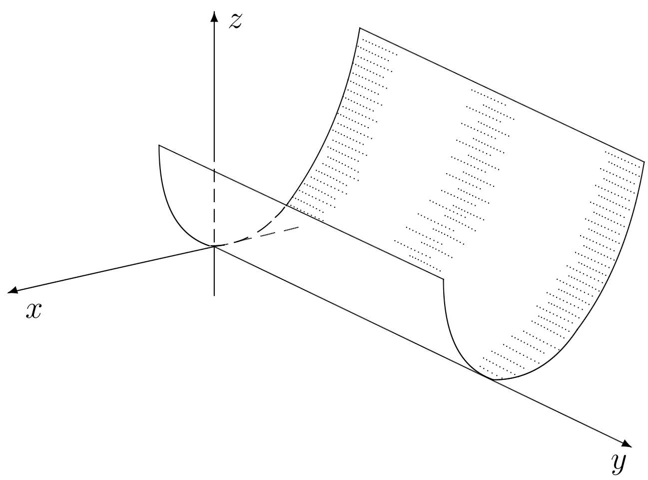
$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



(6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to x^2$

$G_f = \{(x, y, x^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



Exercícios 1.2:

1. Esboce o gráfico de $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(P) =$ distância do ponto P ao ponto $(0, 0)$ onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$.

2. Tente definir uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico seja uma "telha eternit" .

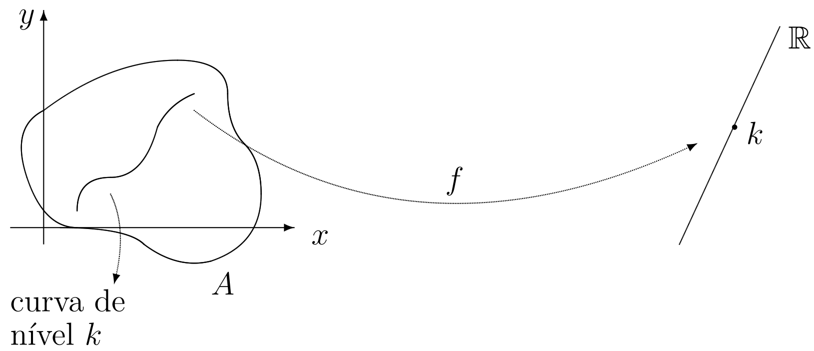
3. Esboce o gráfico de $f(x, y) = x^2 + |y|$.

1.3 Curvas e Superfícies de Nível

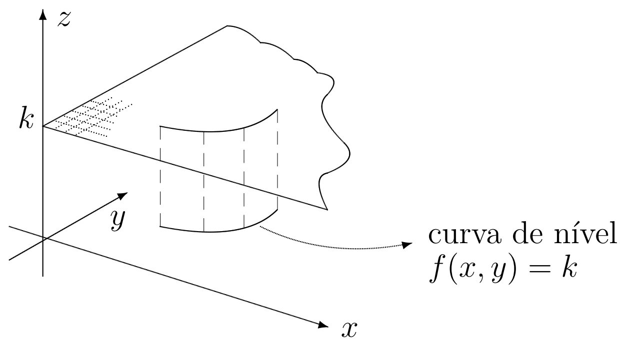
Existe uma outra técnica gráfica útil para descrever o comportamento de uma função de duas variáveis. O método consiste em descobrir no plano xy os gráficos das equações $f(x,y) = k$ para diferentes valores de k. Os gráficos obtidos desta maneira são chamados as **curvas de nível** da função f.

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Curva de nível k : $\{(x,y) \in A \ \text{ tal que } \ f(x,y) = k\}$.



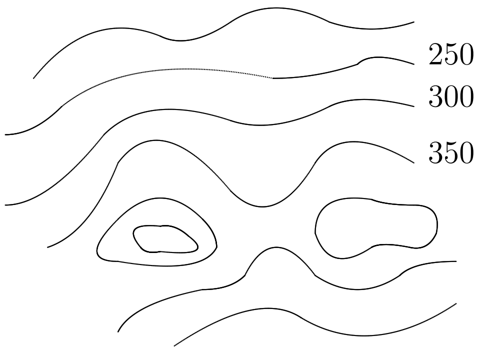
ou



Exemplos:

1. $z = f(x,y) =$ altura em relação ao nível do mar (definida em uma pequena porção aproximadamente plana).

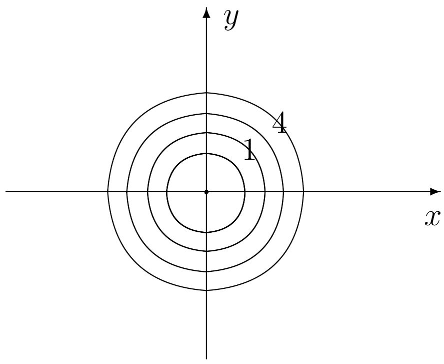
   Nossas curvas de nível correspondem às **linhas de contorno** em uma mapa topográfico.

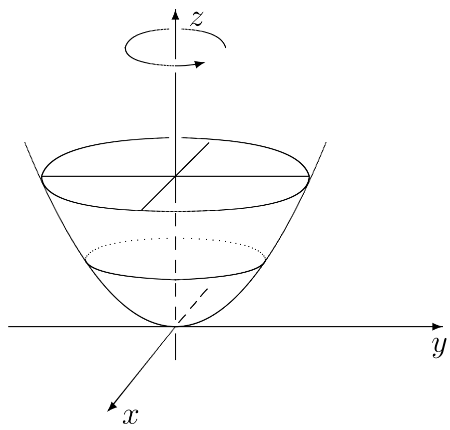


2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $f(x, y) = x^2 + y^2$

   As curvas de nível são os gráficos das equações $x^2 + y^2 = k$.

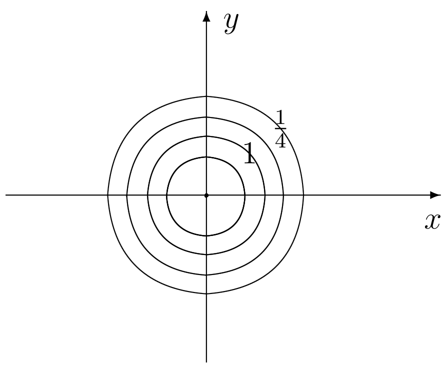


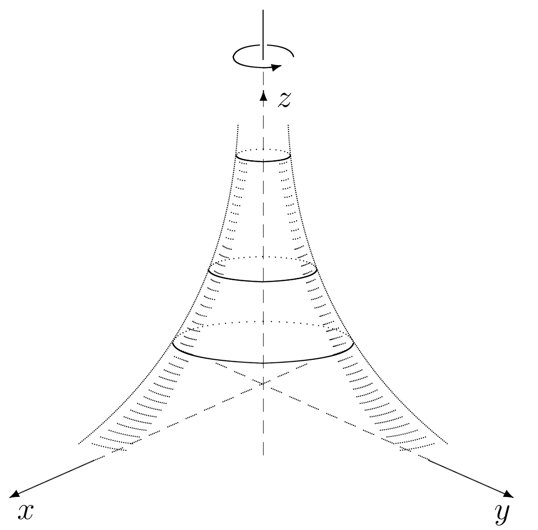


3. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   Curvas de nível: $x^2 + y^2 = c$.





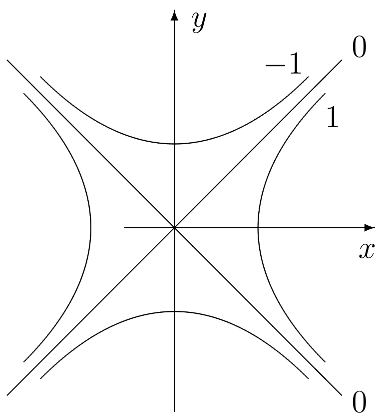
4. $z = f(x,y) = x^2 - y^2$

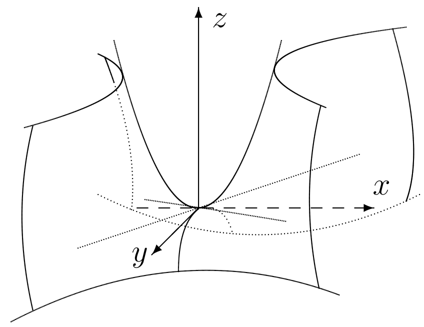
   Curvas de nível:

   $x^2 - y^2 = c$

   $c = 0 \to |x| = |y|$

   $c \neq 0$ - hipérboles



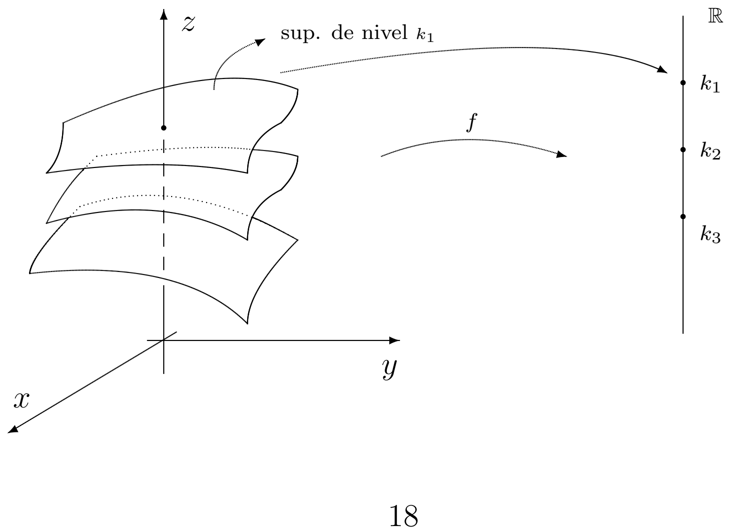


Se f é uma função de três variáveis x, y, z então, por definição, as **superfícies de nível** de f são os gráficos de $f(x,y,z) = k$, para diferentes valores de k.

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Superfície de nível $k : \{(x,y,z) \in A \text{ tal que } f(x,y,z) = k\}$.

Em aplicações, por exemplo, se $f(x,y,z)$ é a temperatura no ponto (x,y,z) então as superfícies de nível são chamadas **superfícies isotermas**. Se $f(x,y,z)$ representa potencial elas são chamadas **superfícies equipotenciais**.



Exemplos:

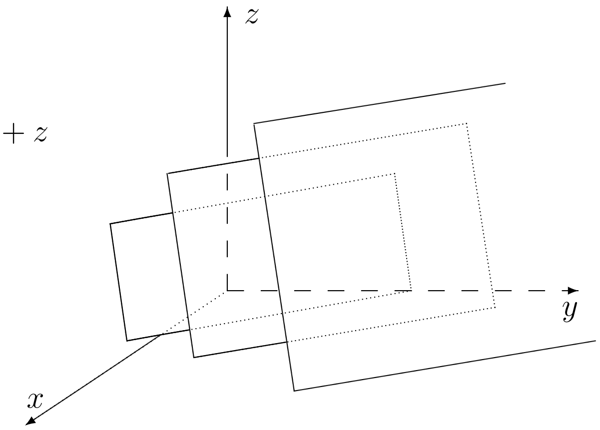
(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x, y, z) = 2x + y + z$

superfícies de nível

$2x + y + z = k$

planos paralelos



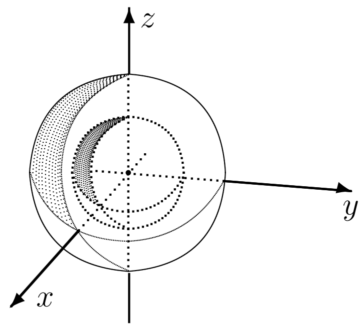
(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

superfícies de nível

$x^2 + y^2 + z^2 = k \geq 0$

Superfícies esféricas de centro na origem

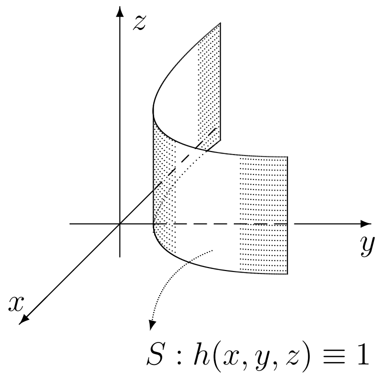


(3) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$h(x, y, z) = \dfrac{y}{e^x}$

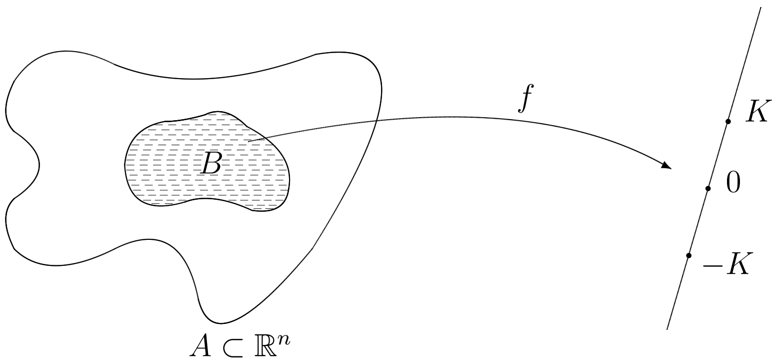
superfícies de nível

$y = ke^x$



1.4 Funções Limitadas

Definição 1.4.1. $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diz-se* **limitada em um conjunto** $B \subset A$ *se existir uma constante* $K \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f(P)| \leq K, \ \forall\, P \in B$.



Exemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $f(x, y) = 2x + y$

   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$

   f é limitada em B ; senão vejamos:

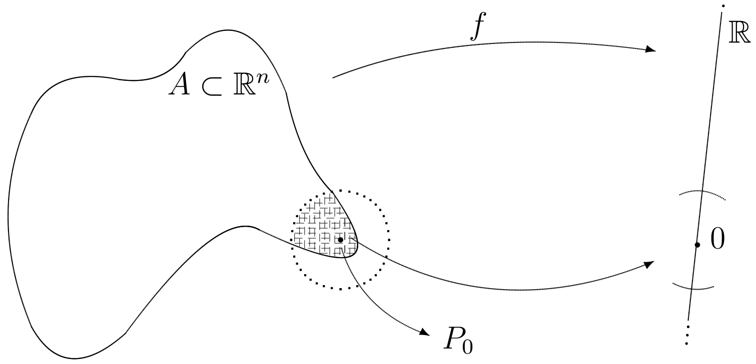
   $|f(x, y)| = |2x + y| \le 2|x| + |y| \le 2a + a = 3a$.

2. $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$

   $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   f não é limitada em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Definição 1.4.2. $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diz-se* **limitada em um ponto** $P_0 \in A$ *se existir* $\delta > 0$ *tal que* f *seja limitada em* $A \cap B(P_0, \delta)$.



Exemplo:

$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

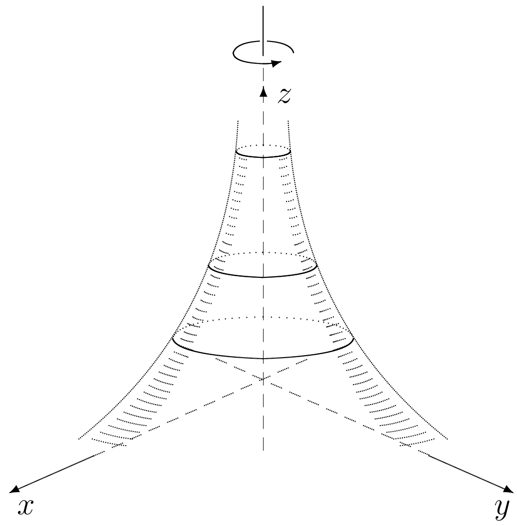
$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

não é limitada em

$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ mas é limitada

em qualquer ponto de

$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.



Teorema 1.4.3. *Se uma função é limitada em todos os pontos de um conjunto compacto C então ela é limitada em C .*

Prova:

Para todo $P \in C$ existe $B(P, \delta_p)$ tal que

$$|f(Q)| < K_P \ , \quad \forall\, Q \in C \cap B(P, \delta_p)\,.$$

Como C é compacto, pelo Teorema de Heine-Borel existe um número finito de bolas abertas $B(P_1, \delta_{p_1}), \ldots, B(P_n, \delta_{p_n})$ que recobrem C .

Temos as constantes $K_{P_1}, \ldots, K_{P_n}$.

Seja $K = \max\{K_{P_1}, \ldots, K_{P_n}\}$.

Então,

$$P \in C \Rightarrow \exists\ P_i \quad \text{tal que} \quad P \in B(P_i, \delta_{p_i}) \Rightarrow |f(P)| < K_{P_i} \le K\,.$$

Portanto f é limitada em C .

Exercícios 1.4:

1. Determinar os domínios máximos de cada uma das funções abaixo, esboçando-os gra-

ficamente:

(a) $z = \text{arc sen}\dfrac{x}{x+y}$ (b) $z = \dfrac{\ln(x-2y)}{\sqrt{y-2x}}$

(c) $z = \ln(36 - 4x^2 - 9y^2)$ (d) $z = \dfrac{x}{y^2 - 4x}$

(e) $z = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

2. Esboce o gráfico de:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

   (b) $g(x,y) = \text{sen}\dfrac{1}{x}\ ,\quad x \neq 0$

3. Considere no $\mathbb{R}^2$ o seguinte conjunto:

$$H = \{(x,y) \in R^2 \mid x \leq y \leq x+1\}\,.$$

   Considere ainda $f : H \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$. Observe que f é limitada em todo ponto do conjunto H mas não é limitada em H. Compare com o resultado dado no Teorema 1.4.3.

4. Traçar curvas de nível para as funções:

   (a) $f(x,y) = xy$

   (b) $g(x,y) = \cos x$

5. Determinar as superfícies de nível das funções:

   (a) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$

   (b) $g(x,y,z) = x + 2y$

6. Ache as curvas de nível de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \text{sen}(x-y)$. Esboce o gráfico de f.

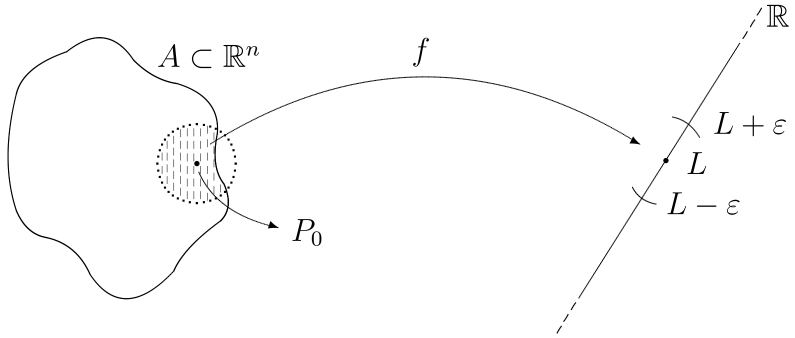
1.5 Limites

Definição 1.5.1. *Escrevemos* $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$ *e dizemos que* ***limite da função*** f ***no ponto*** P_0 ***é igual a*** L *quando:*

(i) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* P_0 *é ponto de acumulação de* A .

(ii) Correspondendo a cada $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 < \|P - P_0\| & = & d(P, P_0) < \delta \\ P \in A & & \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(P) - L| < \varepsilon\,.$$



Observação: Quando $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = 0$ diremos frequentemente que f é **infinitésima no ponto** P_0 .

Exemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $(x, y) \to x$

   f é infinitésima no ponto (0,0)

   De fato:

   Sabemos que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

   Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta \leq \varepsilon$.

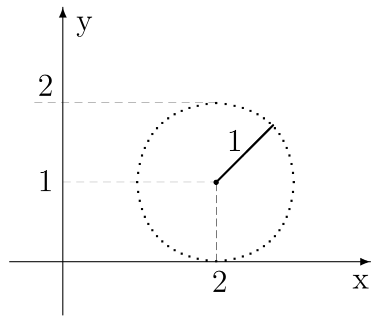
   Então,

   $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Longrightarrow |x| < \delta \leq \varepsilon$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $f(x,y) = x + y^2$

   $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = 3$

   De fato:

   Sabemos que

   $|x + y^2 - 3| = |x - 2 + y^2 - 1| \leq |x-2| + |y+1|\,|y-1|$

   Então, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \min\left\{1\,,\ \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$.

   Logo, $|y+1| < 3$.

   Teremos,

   $[(x-2)^2 + (y-1)^2]^{1/2} < \delta \Rightarrow |x+y^2-3| \leq |x-2| + |y+1|\,|y-1| \leq \delta + 3\delta = 4\delta \leq 4\dfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

Propriedades:

1. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem limite em um ponto P_0 então este limite é único.

2. Se $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L$ e $\lim\limits_{P\to P_0} g(P) = M$ então, $\lim\limits_{P\to P_0} (f+g)(P) = L + M$ e $\lim\limits_{P\to P_0} (fg)(P) = L.M$

3. Se $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L \neq 0$, então, $\lim\limits_{P\to P_0} \dfrac{1}{f(P)} = \dfrac{1}{L}$

   Ainda se $\lim\limits_{P\to P_0} g(P) = M$, então, $\lim\limits_{P\to P_0} \dfrac{g(P)}{f(P)} = \dfrac{M}{L}$

4. Se uma função tem limite em um ponto P_0 então ela é limitada em P_0. (P_0 pertencente ao domínio da função).

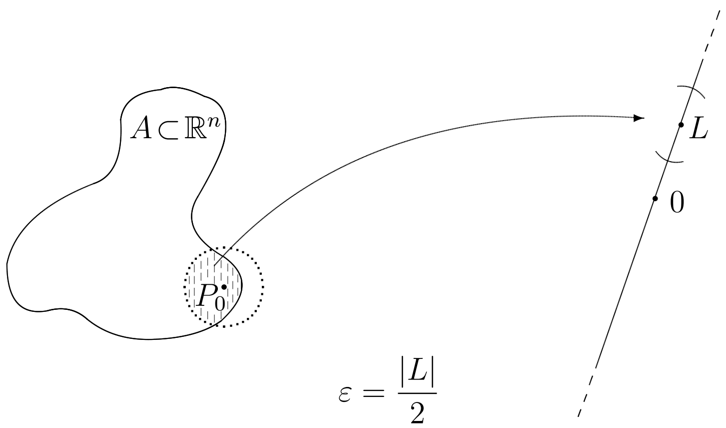
   Observação: A recíproca não é verdadeira. (Dê um contra exemplo).

5. O produto de um infinitésimo em um ponto por uma limitada no ponto é um infinitésimo no ponto.

6. **Teorema da Conservação do Sinal:**

   Se $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L \neq 0$, então existe $B(P_0, \delta)$ na qual as imagens $f(P)$ têm o mesmo sinal de L (exceto, possívelmente, $f(P_0)$).

Idéia:



— / / — / / —

No caso de uma variável vimos que existem somente duas "direções" através das quais o ponto P pode se aproximar do ponto P_0. Introduzimos então as noções de limite à esquerda e à direita. No caso de duas variáveis (ou mais) temos um número infinito de "modos de aproximação".

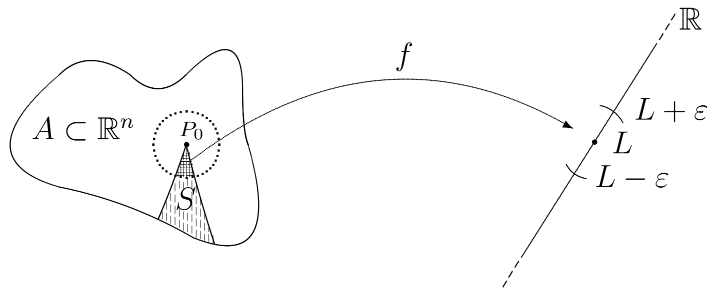
O caso geral é coberto pela seguinte definição:

Definição 1.5.2. *Sejam S um conjunto no qual f está definida e P_0 um ponto de acumulação de S. Dizemos que* ***$f(P)$ converge para L conforme P aproxima-se de P_0 em S*** *e escrevemos*

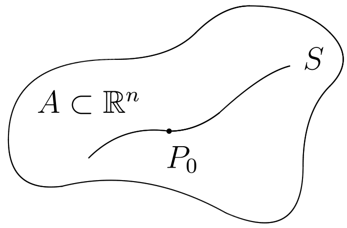
$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in S}} f(P) = L$$

se, e somente se, correspondendo a cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \|P - P_0\| < \delta \\ P \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(P) - L| < \varepsilon$$



Observação: Um importante caso especial é quando S é um segmento ou um arco de curva.



Teorema 1.5.3. *Se $f(P)$ está definida para todos pontos P em uma vizinhança de P_0 , exceto, possivelmente, em P_0 e $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$, então o limite de $f(P)$ existe para P aproximando-se de P_0 em* **qualquer** *conjunto S que tenha P_0 como ponto de acumulação e sempre tem o mesmo valor L .*

Prova: Dados P_0 e S nas condições.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$, sabemos que existe $\delta > 0$, tal que $0 < \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon$.

Isto ainda é verdadeiro se $P \in S$.

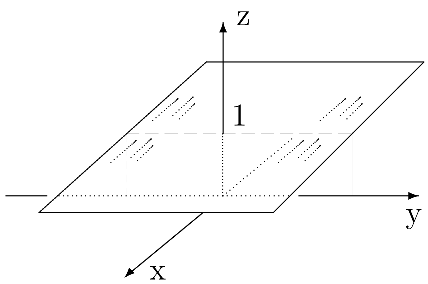
Assim segue que $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in S}} f(P) = L$.

Observação:

Este teorema fornece um critério:

$\boxed{\text{Se os limites em dois caminhos diferentes são diferentes então o limite não existe.}}$

Exemplos:



1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, & para\ x \neq 0 \\ 0\,, & para\ x = 0 \end{cases}$$

$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in S_1}} 1 = 1$$

$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} 0 = 0$$

Portanto, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

2. $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0) \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} P \in \text{eixo } y \\ P \in \text{eixo } x \end{array}\right\} \Longrightarrow xy = 0 \Longrightarrow f(P) = 0$$

Logo $f(P)$ converge para **0** conforme P aproxima-se de 0 através dos eixos coordenados.

É verdade que $\lim\limits_{P\to 0} f(P) = 0$?

$P = (x,y)$

$|f(P)| = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$

Assim dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \varepsilon$ e teremos

$$0 < \|P - 0\| < \delta = \varepsilon \implies |f(P) - 0| < \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{P\to 0} f(P) = 0$.

3. $g : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to R$

$g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$g(P) \equiv 0$ quando P está em um dos eixos coordenados, de modo que $g(P)$ converge para 0 quando P aproxima-se de O pelos eixos. Entretanto $\lim\limits_{P\to O} g(P)$ não existe.

Seja $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

$g(P) = g(x,x) = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{\substack{P\to 0\\P\in S}} g(P) = \dfrac{1}{2} \neq 0$

Portanto, $\lim\limits_{P\to 0} g(P)$ não existe.

Observamos que $g(x, m\,x) = \dfrac{m}{1+m^2}$ e que $g(0,y) = 0$ e assim o gráfico de g é constituído por retas horizontais. Tente esboça-lo.

4. $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

   $F(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

   Se P pertence a um dos eixos, $F(P) = 0$

   Sobre a reta $y = x$:

   $F(P) = F(x,x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ de modo que $\lim\limits_{\substack{P\to 0\\ P=(x,x)}} F(P) = 0\,.$

   De fato, $F(P)$ converge para 0 conforme P aproxima-se da origem ao longo de toda reta passando pela origem.

   Vejamos:

   Seja $y = mx$

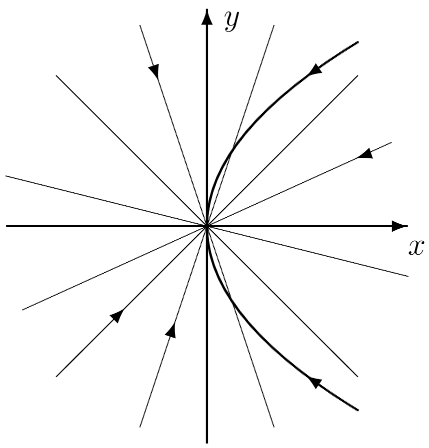
   $F(P) = F(x,mx) = \dfrac{m^2x}{1+m^4x^2}$ e assim $\lim\limits_{\substack{P\to 0\\ y=mx}} F(P) = 0\,.$

   Apesar disto, **não** é verdade que $\lim\limits_{P\to 0} F(P) = 0\,.$

   Tomemos $S = \{(x,y) \mid y^2 = x\}$

   $F(P) = F(y^2,y) = \dfrac{1}{2}$

   $\lim\limits_{\substack{P\to 0\\ P\in S}} F(P) = \dfrac{1}{2}\,.$



1.6 Continuidade

Definição 1.6.1. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, P_0 um ponto de acumulação de A com $P_0 \in A$. f é dita **contínua em** P_0 se $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$, ou seja:*

$$\textit{dado } \varepsilon > 0\,,\ \exists\,\delta > 0 \textit{ tal que}$$

$$\left.\begin{array}{c} \|P - P_0\| < \delta \\ P \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon\,.$$

Definição 1.6.2. *Uma função f é dita* ***contínua em um conjunto B*** *quando for contínua em todo ponto de B.*

Exemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x + y$

   Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

   Dado $\varepsilon > 0$

   Queremos $\delta > 0$ tal que

   $\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{1/2} < \delta \Longrightarrow |x + y - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$

   mas

   $|x + y - (x_0 + y_0)| \le |x - x_0| + |y - y_0| < \delta + \delta = 2\delta$

   Basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

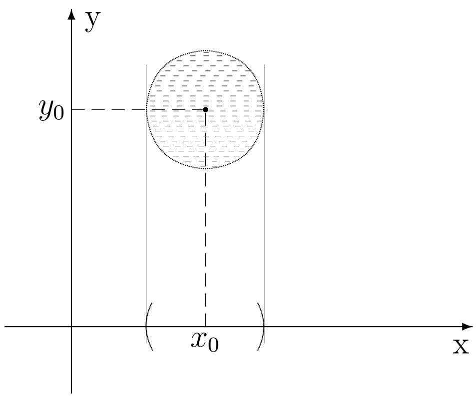
2. $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $p_1(x, y) = x$

   p_1 é contínua no $\mathbb{R}^2$.

   Olhe a ilustração ao lado.

   Qual o δ apropriado?



3. $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

   $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$

   p_i é contínua no $\mathbb{R}^n$.

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ , & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   f não é contínua em $(0,0)$.

Propriedades:

1. A soma de m funções contínuas em um ponto é uma função contínua no ponto.

2. O produto de m funções contínuas em um ponto é uma função contínua no ponto.

   Conseqüência: Denotando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, uma polinômial $P(x)$ em $x_1, \ldots, x_n$ é uma soma de parcelas do tipo:

$$a x_1^{\ell_1} \cdot x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a \ \text{ - constante} \\ \ell_i \in N \, , \quad i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

   que pode ser escrita como

$$a \left[p_1(x)\right]^{\ell_1} \cdots \left[p_n(x)\right]^{\ell_n}$$

   que é contínua, como produto de funções contínuas.

   Logo, usando a propriedade (1), toda polinomial é contínua.

3. Dada uma função contínua e $\neq 0$ em um ponto, então a recíproca é contínua naquele ponto.

4. Se uma função é contínua e $\neq 0$ em um ponto, ela possui sinal constante em alguma vizinhança daquele ponto.

5. Se uma função é contínua em um conjunto compacto, então ela é limitada nesse conjunto.

De fato:

Como a função tem limite em todos os pontos do conjunto, ela é limitada em todos os pontos do conjunto compacto. Pelo teorema 1.4.3 ela é limitada no conjunto.

Definição 1.6.3. $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad B \subset A$.

Imagem *do conjunto* B *pela função* f *é o conjunto* $f(B) = \{f(P) \;/\; P \in B\}$.

Assim, por exemplo, a função f *é dita limitada em* B *se* $f(B)$ *é limitado.*

Observação: Com esta definição a propriedade (5) pode ser enunciada assim:

Se f é contínua em K onde K é compacto então $f(K)$ é limitado. Como $f(K) \subset \mathbb{R}$ e é limitado, temos pelo ***axioma do sup,*** que existe $L = \sup f(K)$ e $\ell = \inf f(K)$.

Teorema 1.6.4. *Se uma função é contínua em um conjunto compacto então existe um ponto onde ela atinge seu extremo superior e um ponto onde ela atinge seu extremo inferior.*

Prova: Suponhamos que f não assuma $L = \sup f(K)$.

Logo $f(P) < L$, $\forall\, P \in K$.

Seja $g(P) = L - f(P) > 0$, contínua.

Assim, $\dfrac{1}{g(P)}$ é contínua no compacto K .

Então $\dfrac{1}{g(P)} = \dfrac{1}{L - f(P)}$ é limitada em $K \Rightarrow \exists\, H$ tal que $\dfrac{1}{L - f(P)} < H$, $\forall\, P \in K$.

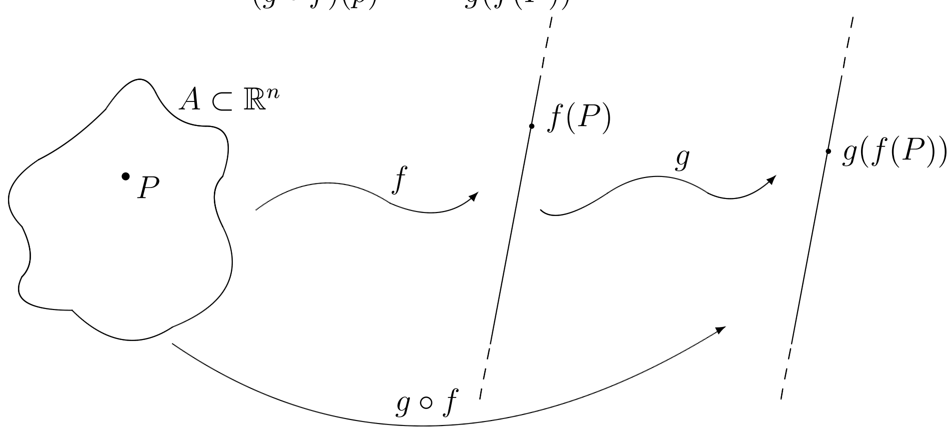
Logo $L - f(P) > \dfrac{1}{H} \Rightarrow L - \dfrac{1}{H} > f(P)$, $\forall\, P \in K$.

Portanto, L não é extremo superior (contra hipótese).

Fica como exercício a demonstração para extremo inferior.

Definição 1.6.5. *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}$ *e* $g : B \to \mathbb{R}$. *A* ***função composta*** *de* g *com* f , *indicada por* $g \circ f$ *é definida por*

$$\begin{aligned} g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (g \circ f)(p) &= g(f(P)) \end{aligned}$$

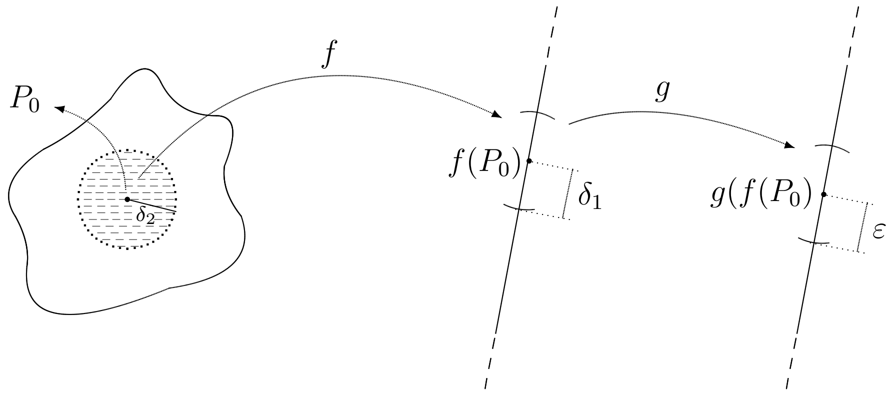


Teorema 1.6.6. *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}$ *e* $g : B \to \mathbb{R}$ *tais que* f *seja contínua em* P_0 *e* g *contínua em* $f(P_0)$. *Então* $g \circ f$ *é contínua em* P_0 .

Prova: Dado $\varepsilon > 0$.

Queremos $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \|P - P_0\| < \delta \\ P \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow |(g \circ f)(P) - (g \circ f)(P_0)| < \varepsilon \,.$$



Sabemos que existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon\,,\ f(P_0))$ tal que

$|z - f(P_0)| < \delta_1 \Longrightarrow |g(z) - g(f(P_0))| < \varepsilon$.

Como f é contínua em P_0 sabemos que dado $\delta_1 > 0$, $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \|P - P_0\| < \delta_2 \\ P \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(P) - f(P_0)| < \delta_1 \,.$$

Logo para

$\|P - P_0\| < \delta_2 \Longrightarrow |f(P) - f(P_0)| < \delta_1 \Longrightarrow |g(f(P)) - g(f(P_0))| < \varepsilon$.

Portanto, $g \circ f$ é contínua em P_0 .

Exercícios 1.6:

1. Mostrar, pela definição, que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2 - 4) = 0$.

2. Seja a função $f(x, y) = \begin{cases} 1\,, & x \geq 0 \\ -1\,, & x < 0\,. \end{cases}$

Prove que a função tem limite igual a 1 nos pontos (x_0, y_0) com $x_0 > 0$ e que tem limite igual a -1 nos pontos (x_0, y_0) com $x_0 < 0$. Prove ainda que não tem limite nos pontos $(0, y_0)$.

3. Sejam A e B dois pontos no espaço e seja $f(P) = \|P - A\| - \|P - B\|$.

   f é uma função limitada?

   Você pode mostrar que, para qualquer P_0, $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$?

4. Prove, usando a definição de limite, que: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (x^2 + 2yx + y^2) = 9$.

5. Determinar o valor dos seguintes limites, quando existirem:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{x^2 + y^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$ (d) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 4 \\ y \to \pi}} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$

   (e) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(1 + y^2)\operatorname{sen} x}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1 + x - y}{x^2 + y^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ z \to 0}} \frac{4x - y - 3z}{2x - 5y + 2z}$

6. Usando a definição, prove que $f(x, y) = xy + 6x$ é contínua em:

   (a) $(1, 2)$ (b) (x_0, y_0)

7. Investigue a continuidade de cada uma das funções abaixo, no ponto (0,0):

   (a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{3x + 5y} & , \ 3x + 5y \neq 0 \\ 0 & , \ 3x + 5y = 0 \end{cases}$

   (b) $g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2 + y^2} & , \ \text{se} \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ \text{se} \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

8. (a) Mostre que a função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é limitada em $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostre que $f(x, y)$ não tem limite em $(0, 0)$.

(c) Caso exista, determine o valor $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[\operatorname{sen}(x+y)\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]$.

9. Investigue a continuidade no ponto (0,0) da função abaixo:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x-y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1.7 Derivadas Parciais e Funções Diferenciáveis

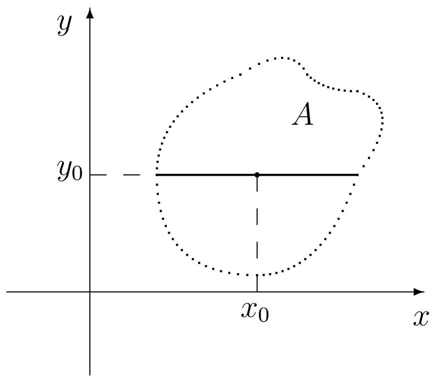
1.7.1 Derivadas Parciais

Seja $z = f(x, y)$ definida em um conjunto aberto A e seja $(x_0, y_0) \in A$. Então para x suficientemente próximo de x_0 todos os pontos (x, y_0) estão em A. Assim podemos considerar $z = f(x, y_0)$ como uma função de x, em um pequeno intervalo em torno de x_0. A derivada em x_0 desta função de x (se a derivada existir) é chamada **derivada parcial de f em relação a x no ponto** (x_0, y_0).

Notações:

$f_x(x_0, y_0)\,;\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,;\ f_1(x_0, y_0)$

$z_x(x_0, y_0)\,;\ \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$



Assim:

$$f_x(x_0, y_0) = \left[\frac{df(x, y_0)}{dx}\right]_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}\,.$$

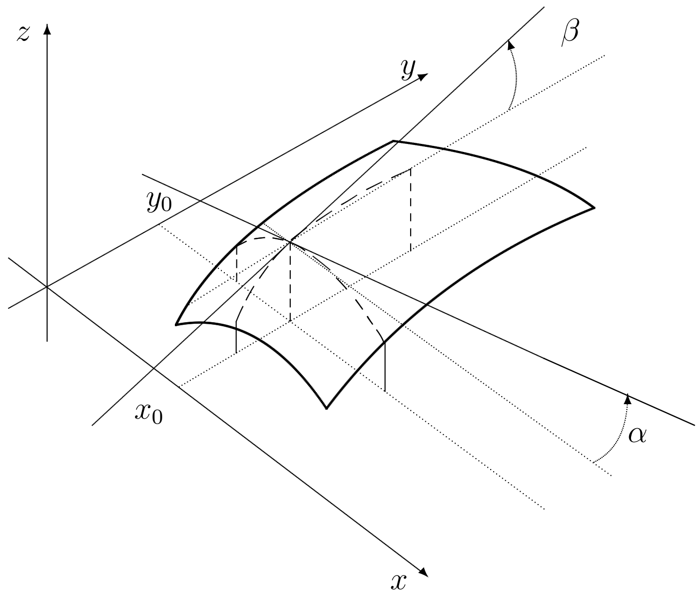
Considerando z como uma função de y, para x fixo, obtemos de maneira semelhante uma outra derivada parcial $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 = z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

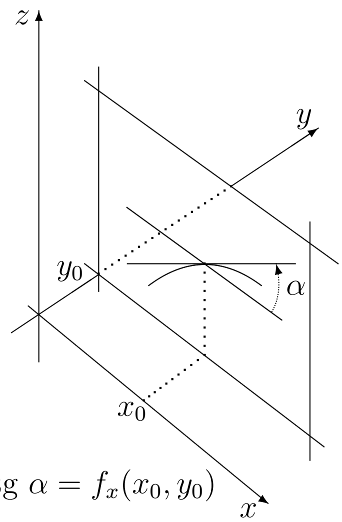
Temos

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

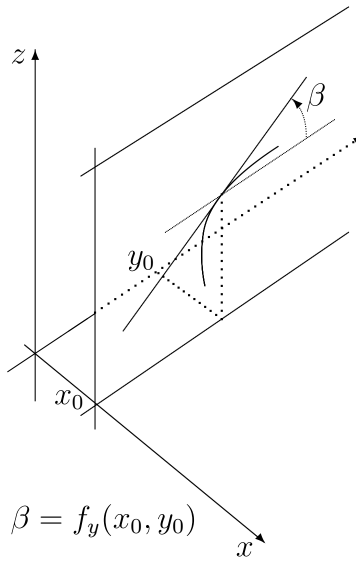
Interpretação Geométrica

Podemos interpretar geometricamente a derivada parcial como uma inclinação. Consideremos a secção da superfície $z = f(x, y)$ pelo plano vertical $y = y_0$. Neste plano a curva $z = f(x, y_0)$ tem uma tangente com inclinação $f_x(x_0, y_0)$ em x_0.



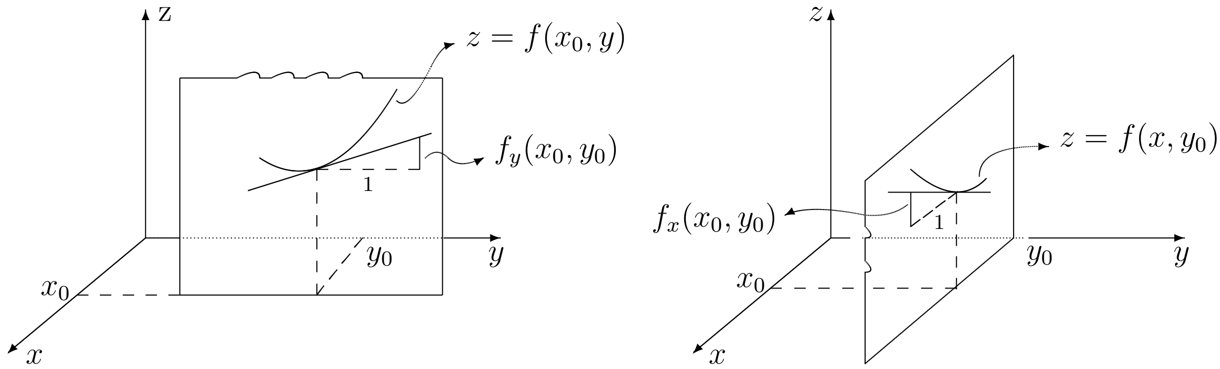


tg $\alpha = f_x(x_0, y_0)$



tg $\beta = f_y(x_0, y_0)$

outras ilustrações:



Observação: Para se achar as derivadas parciais de uma função dada por uma lei de formação podem-se aplicar as regras usuais para funções de uma variável, tratando-se todas as variáveis independentes, exceto uma, como constantes.

Exemplo: Se $f(x, y) = x^2y + y\cos x$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$.

Resolução: Mantendo y constante e derivando em relação a x obtemos $f_x(x, y) = 2xy - y$ sen x e assim $f_x(1, 0) = 0$.

Mantendo x constante e derivando em relação a y obtemos $f_y(x, y) = x^2 + \cos x$ e assim $f_y(1, 0) = 1 + \cos 1$.

Para o caso de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

Qual a derivada parcial no ponto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ relativamente a x_1 da função $f(x_1, \ldots, x_n)$?

Fixando-se $x_2, x_3, \ldots, x_n$ a nossa função fica sendo função de uma variável x_1, $f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Assim
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \left[\frac{df(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{dx_1}\right]_{x_1^0}$$

Exemplo: $z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cos x_2 + x_3$

$f_1(x_1, x_2, x_3) = \cos x_2$; $f_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1$ sen x_2; $f_3(x_1, x_2, x_3) = 1$ onde estamos usando a notação f_i para $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

1.7.2 Derivadas parciais de ordem superior

Se f é uma função de duas variáveis x e y, então f_x e f_y são também funções de duas variáveis. Se estas funções f_x e f_y estiverem definidas em um aberto A poderemos considerar suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$ chamadas **derivadas parciais de segunda ordem de f**, denotadas como segue:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Se estas derivadas parciais existirem em todos os pontos de um aberto A, poderemos falar nas derivadas parciais de terceira ordem, e assim sucessivamente.

De forma completamente análoga definimos as derivadas parciais de ordem superior para função de três ou mais variáveis.

Definição 1.7.1. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aberto. f é dita de* ***classe C^k*** *$(k \geq 1)$* ***em B*** *$\subset A$ se f e as derivadas parciais até a ordem k forem contínuas em todos os pontos de B. f é dita de* ***classe C^∞*** *se f é de classe C^k, $\forall\, k \geq 1$.*

Notação: $f \in C^k$ ou $f \in C^\infty$.

Exemplo 1: A função $z = f(x, y) = xy$ é de classe C^∞ já que $f_x(x, y) = y$; $f_y(x, y) = x$; $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1$ e todas as demais derivadas parciais de qualquer ordem são nulas. Como as funções acima e a função nula são contínuas temos que $f \in C^\infty$.

Exemplo 2: A função $z = f(x, y) = x \text{ sen } y + y^2 \cos x$ é de classe C^∞.

Observação: Nestes dois exemplos notamos que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, isto é, a ordem de derivação não influi no resultado, mas isto nem sempre é válido.

De fato:

Consideremos $z = f(x, y) = x + |y|$

$$f_x(x, y) \equiv 1 \qquad\qquad f_{xy}(0, 0) = 0$$

No entanto $f_y(0, 0)$ não existe e assim $f_{yx}(0, 0)$ não existe.

O próximo Teorema fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$

Teorema 1.7.2 (Teorema de Schwarz ou Teorema de Clairaut). *Seja $z = f(x, y)$ tal que f, f_x, f_y e f_{xy} sejam contínuas em um conjunto aberto A. Seja $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. Então $f_{yx}(P_0)$ existe e $f_{yx}(P_0) = f_{xy}(P_0)$.*

Prova:

Seja $\phi(x) = f(x\,,\, y_0 + k) - f(x, y_0)$, onde k e y_0 são fixados.

Para x suficientemente próximo de x_0 e k pequeno, ϕ é uma função da única variável x, diferenciável no intervalo $(x_0\,,\, x_0 + h)$ e contínua em $[x_0\,,\, x_0 + h]$, h pequeno.

Para esta função aplicamos o Teorema do Valor Médio para funções de uma variável, entre x_0 e $x_0 + h$, obtendo:

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h \cdot \phi'(x_0 + \theta_1 h) \quad \text{onde} \quad 0 < \theta_1 < 1$$

Assim: $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h\,[f_x(x_0 + \theta_1 h\,,\, y_0 + k) - f_x(x_0 + \theta_1 h\,,\, y_0]$.

Agora para cada h aplicamos o Teorema do Valor Médio novamente para a segunda variável, obtendo:

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h \cdot k\,[f_{xy}(x_0 + \theta_1 h\,,\, y_0 + \theta_2 k)]$$

onde também $0 < \theta_2 < 1$.

Relembrando o significado de ϕ podemos escrever:

$$[f(x_0 + h\,,\, y_0 + k) - f(x_0 + h\,,\, y_0)] - [f(x_0\,,\, y_0 + k) - f(x_0\,,\, y_0)] = h{\cdot}k\, f_{xy}(x_0 + \theta_1{\cdot}h\,,\, y_0 + \theta_2{\cdot}k)$$

Dividindo por k e fazendo $k \to 0$ obtemos $f_y(x_0 + h\,,\, y_0) - f_y(x_0\,,\, y_0) = h\, f_{xy}(x_0 + \theta_1 h\,,\, y_0)$, desde que f_{xy} é contínua.

Novamente usando a continuidade de f_{xy}, dividimos por h e fazemos $h \to 0$ e obtemos

$$f_{yx}(x_0\,,\, y_0) = f_{xy}(x_0\,,\, y_0)$$

$\square$

Observação: Vejamos outro exemplo onde não temos a igualdade $f_{xy} = f_{yx}$.

Consideremos:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Neste caso temos $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

De fato,

$$f_x(x,y) = xy \cdot \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_y(x,y) = xy \cdot \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} + x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = 1$$

Observação: No exemplo anterior podemos observar que f, f_x e f_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Assim, pelo Teorema anterior f_{xy} não pode ser contínua em $(0,0)$, pois caso o fosse $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$, o que não é o caso. Obtenha uma expressão para f_{xy} e tente provar a não continuidade.

Exercícios 1.7.2:

1. Se $f(x,y) = (x-y)\,\text{sen}(3x+2y)$ calcule: (a) $f_x\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$, (b) $f_y\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$

2. Calcule u_x e u_y quando:

   (a) $u = e^{xy}\,\text{sen}(x+y)$ (b) $u = \ln(x^4 + y^4)\,\text{arcsen}\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

3. Se

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2+xy}{x+y} & \text{para} \quad x \neq -y \\ 0 & \text{para} \quad x = -y \end{cases}$$

(a) calcule $f_x(x,0)$ e $f_y(0,y)$;

(b) observe que f não é constante em nenhuma vizinhança de $(0,0)$.

4. Ache $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$ se $f(x,y) = \ln(x+y)$

5. Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ está satisfeita por:
   (a) $\ln(x^2+y^2)$ (b) $x^3 - 3xy^2$

6. Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável para todo x, mas não é de classe C^1 em $x = 0$.

7. Calcule $f_y(1,2)$ onde $f(x,y) = x^{x^{x^y}} + \operatorname{sen}\,(\pi x)[x^2 + \operatorname{sen}\,(x+y) + e^x \cos^2 y]$.

   Sugestão: Existe uma maneira muito fácil de fazer isto.

8. Sejam $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, contínuas. Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por
   $f(x,y) = \displaystyle\int_0^x g(t,0)dt + \int_0^y h(1,t)dt$

   (a) Mostre que $f_x(x,y) = g(x,0)$ e que $f_y(x,y) = h(1,y)$

   (b) Ache uma função $\overline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{f}_x(x,y) = x$ e $\overline{f}_y(x,y) = y$

1.7.3 Diferenciabilidade

Quando uma função de uma variável é derivável em um ponto, ela é também contínua neste ponto. Observe agora o que acontece com o exemplo a seguir:

Exemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad \text{para} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad \text{para} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Note que não existe limite no ponto $(0,0)$ (visto anteriormente), e assim, f não é contínua em $(0,0)$.

Mas f é derivável em relação a x e a y em $(0,0)$. De fato:

Fixando-se $y = 0 \Longrightarrow z = f(x,0) \equiv 0$, e assim $f_x(0,0) = 0$.

Fixando-se $x = 0 \Longrightarrow z = f(0,y) \equiv 0$, e assim $f_y(0,0) = 0$.

Assim é possível que uma função tenha todas as derivadas parciais em um ponto e que não seja contínua naquele ponto.

Vamos então introduzir o conceito de diferenciabilidade, que entre outras propriedades, vai garantir a continuidade da função. Na realidade ele implicará que o gráfico da função não tem quinas, e em particular, que não tem saltos. Será introduzido por analogia com o conceito de diferenciabilidade de funções de uma variável.

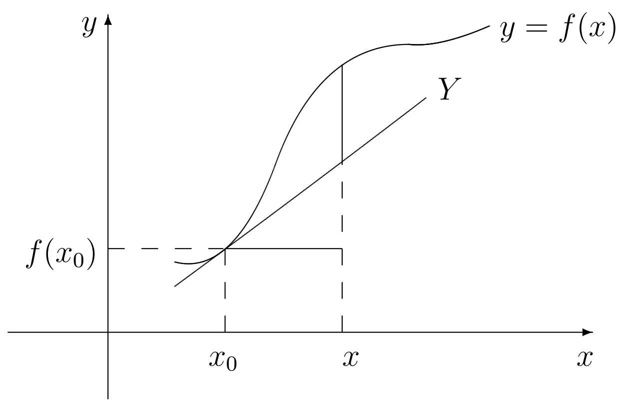
Para uma variável:

$y = f(x)$ é **diferenciável** em x_0, se existe uma reta passando por $(x_0, f(x_0))$ de equação

$$Y = f(x_0) + m(x - x_0),$$

tal que a diferença $f(x) - Y$ seja um infinitésimo de ordem superior, em comparação com $x - x_0$, quando $x \to x_0$, isto é:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Y}{x - x_0} = 0$$



$y = f(x)$ é **derivável** no ponto x_0, se existe o seguinte limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Mas ser derivável é equivalente a ser diferenciável (para funções de uma variável).

De fato:

$\Longrightarrow$ Suponhamos f derivável em x_0 .

Então existe $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m$.

Consideremos a reta de equação $Y = f(x_0) + m(x - x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-Y}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \right) = 0$$

Portanto f é diferenciável em x_0 .

$\Longleftarrow$ Suponhamos f diferenciável em x_0 .

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-Y}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \right) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m \end{aligned}$$

Portanto f é derivável em x_0 .

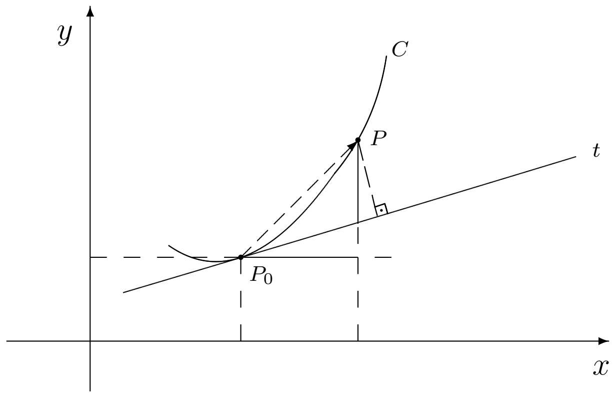
Assim, geometricamente, podemos traçar uma tangente ao gráfico da função f pelo ponto $(x_0\,,\, f(x_0))$.

Exercício Conceitual:

Seja f diferenciável em x_0. Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ onde $y_0 = f(x_0)$. Se P é um outro ponto da curva C descrita por $y = f(x)$ e β é o ângulo entre o vetor $P - P_0$ e a reta tangente a C em P_0 , mostre que

$$\beta \to 0 \quad \text{com} \quad P \to P_0 \ .$$

Reciprocamente, mostre que se $\beta \to 0$, então f é diferenciável em P_0.



Nota: O exercício anterior mostra que em um sentido preciso o ângulo entre a reta tangente e a curva é zero no ponto de tangência.

Para duas variáveis:

Diz-se que $z = f(x, y)$ é **diferenciável** num ponto (x_0, y_0), se existe um plano pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, de equação:

$$Z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) \ ,$$

tal que a diferença $f(x, y) - Z$ seja um infinitésimo de ordem superior, em comparação com $\alpha = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, quando $\alpha \to 0$, isto é:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x, y) - Z}{\alpha} = 0 \qquad (*)$$

Em notação alternativa, tomando $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$ e chamando

$$E(h, k) = f(x, y) - Z = f(x_0 + h, y_0 + k) - [f(x_0, y_0) + Ah + Bk]$$

$(*)$ pode ser reescrita como

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0 \qquad (**)$$

Ainda, com a notação alternativa, temos:

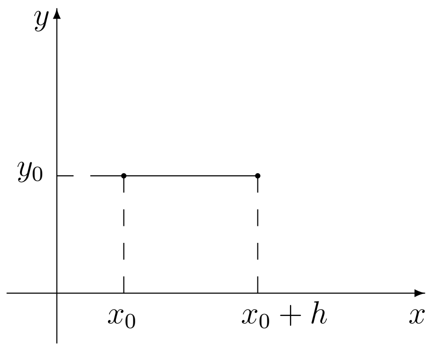
$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bk + E(h, k)$$

. Passando ao limite, com $(h,k) \to (0,0)$, obtemos:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0)$$

Acabamos de provar que se f é **diferenciável** em (x_0,y_0), então f é **contínua** em (x_0,y_0).

Voltemos em $(**)$, fazendo $k=0$



Obtemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\,,\,y_0) - f(x_0,y_0) - Ah}{|h|} = 0$$

Isto equivale a:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\,,\,y_0) - f(x_0,y_0) - Ah}{h} = 0$$

ou

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h\,,\,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} - A\right] = 0$$

ou

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h\,,\,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}\right] = A$$

Assim, $f_x(x_0,y_0) = A$.

Analogamente, $f_y(x_0,y_0) = B$.

Portanto: se f for diferenciável num ponto (x_0,y_0), então f tem derivadas parciais nesse ponto. Além disso, o plano de equação

$$(**) \qquad Z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

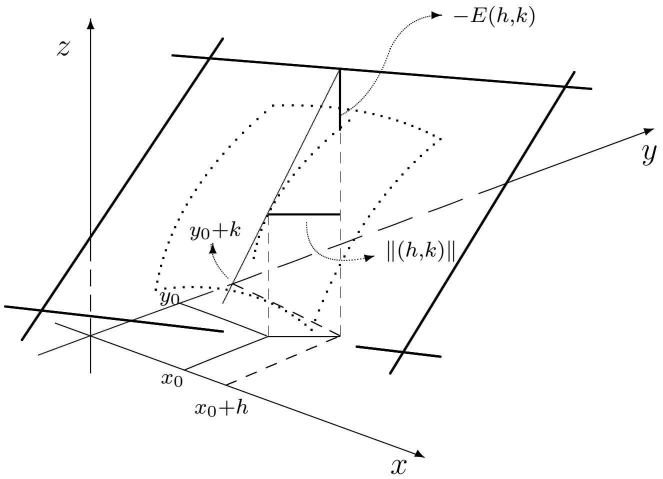
aproxima o gráfico de $z = f(x, y)$ no seguinte sentido:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x, y) - Z}{\alpha} = 0$$

ou, na notação alternativa

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

Este é um modo de exprimir o fato de que o plano **é tangente** à superfície no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Exemplos:

1. $z = g(x, y) = x + y$

   g é diferenciável em (x_0, y_0), $\forall\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

   De fato:

   Consideremos o plano

   $Z = x_0 + y_0 + 1(x - x_0) + 1(y - y_0) = x + y$

   $\dfrac{g(x, y) - Z}{\alpha} = 0 \to 0 \quad \text{com} \quad \alpha \to 0$

2. $z = f(x, y) = xy$

   f é diferenciável em (x_0, y_0), $\forall\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

   De fato:

   Consideremos o plano

   $Z = x_0 y_0 + y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0)$

$$\frac{f(x,y)-Z}{\alpha} = \frac{x(y-y_0)-x_0(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0$$

com $\alpha \to 0$ (já visto anteriormente).

3. $p_1(x,y) = x$

   p_1 é diferenciável em (x_0, y_0), $\forall\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

   De fato:

   Consideremos o plano

   $Z = x_0 + 1(x - x_0) = x$

   $$\frac{p_1(x,y)-Z}{\alpha} = 0 \to 0 \quad \text{com} \quad \alpha \to 0\,.$$

Observação 1: Observe os exemplos (1) e (3). Qual é o tipo de gráfico destas funções? Qual seria o plano esperado para resolver o problema da diferenciabilidade?

Observação 2: No caso de uma função f ser diferenciável em um ponto, nós podemos mostrar que em um sentido preciso o ângulo entre o plano tangente e a superfície é zero no ponto de tangência. [*generalização do exercício conceitual dado anteriormente.*]

Propriedades:

1. A soma (também o produto) de duas funções diferenciáveis em um ponto é uma função diferenciável no ponto.

2. Se uma função $f(x,y) \neq 0$ é diferenciável em um ponto, então a recíproca é diferenciável nesse ponto.

3. Toda polinomial em duas variáveis $P(x,y) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ é diferenciável, como soma e produto de diferenciáveis.

Observação 1: Já vimos que toda função diferenciável é contínua, mas nem toda contínua é diferenciável.

Exemplo:

$z = f(x,y) = |x| + |y|$ é contínua em $(0,0)$.

Fixando $y = 0 \Longrightarrow z = |x| \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ não existe.

Sabemos que se $z = f(x, y)$ é diferenciável, então ela tem derivadas parciais. Assim, $z = |x| + |y|$ não é diferenciável em $(0, 0)$.

Observação 2: Vimos que se $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então existem $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$. No entanto, pode acontecer que existam $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ e f não ser diferenciável em (x_0, y_0).

Exemplos:

1. $z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ para } \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ para } \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   Já foi visto anteriormente que $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Ainda: f não é contínua (e portanto não é diferenciável) em $(0, 0)$.

2. $z = g(x, y) = \sqrt{|xy|}$

   Observe que $g_x(0, 0) = g_y(0, 0) = 0$ e que g é contínua em todo ponto do plano.

   Ainda assim, g não é diferenciável na origem, pois:

$$\frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \frac{g(h, k) - [g(0, 0) + 0 \cdot h + 0 \cdot k]}{\|(h, k)\|} = \frac{\sqrt{|h\,k|}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

   não tende a zero com $(h, k) \to (0, 0)$ (observe o que acontece na direção $h = k$).

   Tente esboçar o gráfico de g .

Algumas vezes é difícil verificar diretamente a diferenciabilidade da função. O próximo teorema dá uma condição suficiente para que uma função f seja diferenciável e é importante dada a facilidade de verificação de suas hipóteses.

Teorema 1.7.3 (Critério de Diferenciabilidade). *Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem em um conjunto aberto A contendo P_0 e forem contínuas em P_0, então f será diferenciável em P_0.*

Prova: Consideremos $P_0 = (x_0, y_0)$. Como A é aberto, para h e k suficientemente pequenos o retângulo formado pelos 4 pontos: (x_0, y_0), $(x_0 + \Delta x\,,\, y_0)$, $(x_0\,,\, y_0 + \Delta y)$ e $(x_0 + \Delta x\,,\, y_0 + \Delta y)$ está contido em A .

Temos então que $\Delta f = f(P) - f(P_0) = f(x_0 + h\,,\, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + h\,,\, y_0 +$

$k) - f(x_0 + h\,,\, y_0)] + [f(x_0 + h\,,\, y_0) - f(x_0, y_0)]$.

Usando o Teorema do Valor Médio para funções de uma variável sobre cada uma das diferenças acima, obtemos:

$$\Delta f = f_y(x_0 + h\,,\, y_1) \cdot k + f_x(x_1, y_0) \cdot h$$

Por hipótese, f_x e f_y são contínuas em P_0 e assim

$$f_x(x_1, y_0) = f_x(x_0, y_0) + \eta_1 \quad \text{e} \quad f_y(x_0 + h\,,\, y_1) = f_y(x_0, y_0) + \eta_2$$

onde ambos η_1 e η_2 tendem a zero com $\|(h,k)\| \to 0$.

Assim: $\Delta f = f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k + \eta_1 \cdot h + \eta_2 \cdot k$.

Pela definição de diferenciabilidade nós temos somente que mostrar:

$$\frac{n_1 \cdot h + n_2 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$$

mas

$$\left| \frac{n_1 \cdot h + n_2 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq (|n_1| + |n_2|) \to 0$$

conforme $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. $\square$

Exemplo:

Seja $z = f(x,y) = \text{sen}(xy)$

$$f_x(x,y) = y \cdot \cos(xy)$$
$$f_y(x,y) = x \cdot \cos(xy)$$

são contínuas em todo ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo pelo teorema anterior, $f(x,y) = \text{sen}(xy)$ é diferenciável em todo ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Observação: Embora o teorema anterior pareça resolver todos os problemas no que se refere a mostrar que uma função é diferenciável, há casos em que ele não se aplica, ou seja: existem funções diferenciáveis em um ponto cujas derivadas parciais não são contínuas neste ponto. Neste caso a verificação da diferenciabilidade deve ser feita pela definição. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo:

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Determine f_x e f_y ;

(b) Mostre que f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$;

(c) Prove que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

(a) $$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2x}{(x^2+y^2)}\cdot \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2y}{(x^2+y^2)}\cdot \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) $\lim\limits_{t\to 0} f_x(t,t)$ e $\lim\limits_{t\to 0} f_y(t,t)$ não existem e portanto f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$.

(c) Para verificar que f é diferenciável em $(0,0)$ note que

$$\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \sqrt{(h^2+k^2)}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) \quad \text{e que} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

A Diferencial

Seja $f(x,y)$ **diferenciável** em (x_0,y_0) e consideremos a transformação linear $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(h,k) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_o)k\,.$$

Voltando à condição de diferenciabilidade notamos que

$$E(h,k) = f(x_0+h\,,\, y_0+k) - f(x_0,y_0) - [f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k] = \Delta f - L(h,k)\,,$$

onde $\Delta f = f(x_0 + h\,,\, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$.

Assim:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - L(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

ou seja $L(h,k) \sim \Delta f$, para $\|(h,k)\| \sim 0$.

Chamamos a transformação linear L de **diferencial** de f em (x_0, y_0).

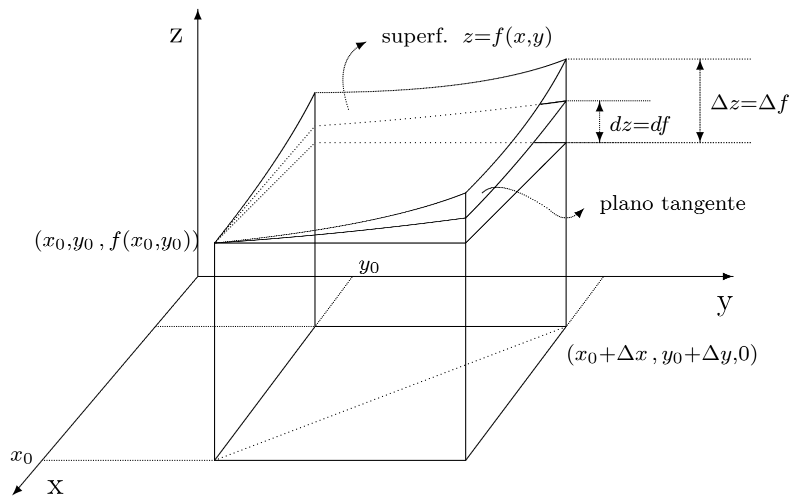
Dizemos que $L(h,k) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$ é a diferencial de f em (x_0,y_0) relativa aos acréscimos h e k.

Em **notação clássica** a diferencial de f em (x,y) relativa aos acréscimos dx e dy é indicada por dz (ou df)

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

Assim, para acréscimos pequenos,

$$\Delta z \sim dz\,.$$



Chamando $\eta = \dfrac{\Delta f - df}{\|(h,k)\|}$, a condição de diferenciabilidade pode ser reformulada como: f é **diferenciável** em (x_0,y_0) se, e somente se, $\Delta f = df + \eta \cdot \sqrt{h^2+k^2}$, onde $\eta \to 0$ com $\|(h,k)\| \to 0$.

Observação 1: Em geral, $\Delta z \neq dz$. Quando $h = \Delta x$ e $k = \Delta y$ são pequenos, então dz constitui uma aproximação de Δz.

Observação 2: Podemos dizer que a diferencial é uma função de quatro variáveis independentes, a saber: as coordenadas x , y do ponto considerado e os acréscimos Δx e Δy .

Exemplos:

1. Se $z = f(x, y) = 3x^2 - xy$, calcule Δz e dz se (x, y) muda de $(1, 2)$ para $(1.01\, , 1.98)$.

   Temos:

   $dz = (6x - y)dx + (-x)dy$

   Substituindo $x = 1$, $y = 2$, $dx = \Delta x = 0.01$ e $dy = \Delta y = -0.02$, obtemos:

   $dz = (6 - 2)(0.01) + (-1)(-0.02) = 0.06$

   Calculando diretamente Δz , teríamos:

   $\Delta z = 0.0605$.

   Assim, o erro envolvido é 0.0005.

2. O raio e a altura de uma caixa de forma cilíndrica são medidos como $3m$ e $8m$ respectivamente, com um possível erro de $\pm 0.05m$. Use diferenciais para calcular o erro máximo no cálculo do volume

   $V = \pi\, r^2 h$

   $dV = \dfrac{\partial V}{\partial r}\, dr + \dfrac{\partial V}{\partial h}\, dh = 2\pi r\, h\, d\, r + \pi\, r^2 dh$

   Substituindo $r = 3$, $h = 8$, $dr = dh = \pm 0.05$, temos:

   $dV = 48\pi(\pm 0.05) + 9\pi(\pm 0.05) = \pm 2.85\pi \simeq \pm 8.95m^3$.

—— / / —— / / ——

Resultados análogos valem para funções de n-variáveis $(n > 2)$.

Por exemplo:

f é **diferenciável** em um ponto $P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em $\mathbb{R}^n$ se

$f(P) = f(P_0) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_n h_n + \eta \cdot \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$ tal que $\eta \to 0$

conforme $\|P - P_0\| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} \to 0$, onde $P = (a_1 + h_1\, , \, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n)$.

Neste caso: $f_{x_i}(P_0) = f_i(P_0) = A_i\, , \quad i = 1, \ldots, n$.

Exercícios 1.7.3:

1. Justifique porque a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & , \text{ se } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ se } \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável na origem.

2. Calcular as diferenciais das funções dadas abaixo:

   (a) $z = e^x y^2$ (b) $z = x^2\sqrt{1+xy^2}$

3. As dimensões de uma caixa retangular fechada são medidas como sendo 3, 4 e 5 metros, com um possível erro de 5cm. Use diferenciais para aproximar o erro máximo no cálculo de :

   (a) área da superfície da caixa;

   (b) volume da caixa.

4. Seja $f(x)$ diferenciável com $f(0) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

   Seja $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)} & , \text{ para } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ para } \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (i) Mostre que existe $g_x(0,0)$ e $g_y(0,0)$;

   (ii) Mostre que $g(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$.

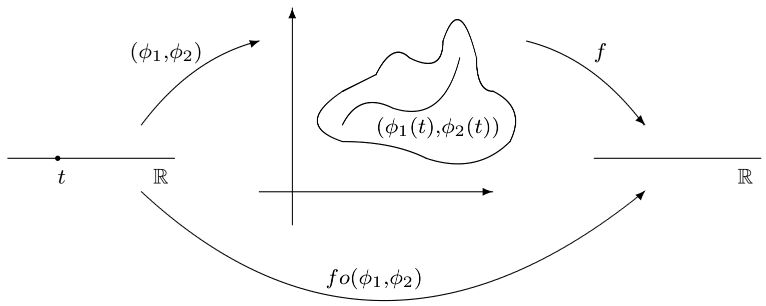
5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$.
   Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

1.7.4 Regras da Cadeia

Muitas vezes a função $z = f(x,y)$ é dada sob a forma de função composta, em que os argumentos x , y são eles próprios funções de t

$$x = \phi_1(t) \qquad\qquad y = \phi_2(t).$$

Então, $z = f(\phi_1(t)\,,\,\phi_2(t))$ e podemos, portanto, falar em diferenciabilidade relativamente a t .



Teorema 1.7.4. *Sejam $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ diferenciáveis em t_0 e $z = f(x,y)$ diferenciável no ponto $P_0 = (\phi_1(t_0),\ \phi_2(t_0))$. Então $z(t) = f(\phi_1(t),\phi_2(t))$ é diferenciável no ponto t_0 e ainda*

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0} .$$

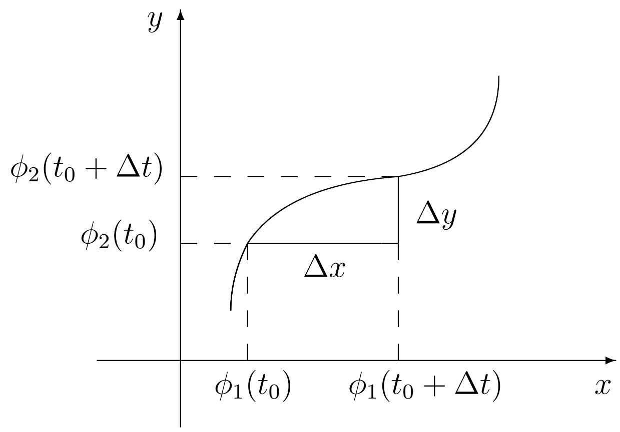
Prova:

Como z é diferenciável em P_0, temos em particular que:

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \Delta y + \alpha\,\eta$$

onde $\eta \to 0$ com $\alpha \to 0$ e $\alpha = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ sendo que

$$\begin{cases} \Delta x = \phi_1(t_0 + \Delta t) - \phi_1(t_0) \\ \Delta y = \phi_2(t_0 + \Delta t) - \phi_2(t_0)\ . \end{cases}$$



Logo, para $\Delta t \neq 0$

$$(*) \qquad \frac{\Delta z}{\Delta t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

Observemos que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0}$$

ainda:

$$\Delta t \to 0 \Longrightarrow [\Delta x \to 0 \quad \text{e} \quad \Delta y \to 0]$$

pois ϕ_1 e ϕ_2 sendo diferenciáveis em t_0 são contínuas em t_0.

Passando ao limite a expressão $(*)$ com $\Delta t \to 0$, temos:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0} .$$

pois $\eta \to 0$ com $\Delta t \to 0$ e $[(\Delta x/\Delta t)^2 + (\Delta y/\Delta t)^2] \to L \in \mathbb{R}$ com $\Delta t \to 0$.

Exemplos:

1. $z = f(x,y) = e^{xy}$ onde $\begin{cases} x = \text{sen } t \\ y = \cos t \end{cases}$

   1º modo:

   $x_0 = \text{sen } t_0$

   $y_0 = \cos t_0$

   $$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = y_0\, e^{x_0 y_0} \cos t_0 + x_0\, e^{x_0 y_0} \cdot -\text{sen } t_0 = e^{x_0 y_0} \left[\cos^2 t_0 - \text{sen}^2 t_0\right].$$

   2º modo:

   $z(t) = e^{\text{sen}\, t \cos t}$

   $$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = e^{\text{sen} t_0 \cos t_0} \left(\text{sen}\, t_0 \cdot -\text{sen}\, t_0 + \cos t_0 \cos t_0\right) = e^{\text{sen} t_0 \cos t_0} \left(\cos^2 t_0 - \text{sen}^2\, t_0\right).$$

   Observação: Podemos pensar que a regra da cadeia seja dispensável, já que podemos primeiro fazer as substituições e depois derivar. Na verdade, ainda continuamos fazendo uso da regra da cadeia mesmo depois de fazermos as substituições.

2. $z = f(x,y) = x^2 + y$ onde $x = t^3, \; y = t^2$

   $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = 6t_0^5 + 2t_0$

Observação: Vale um teorema análogo para o caso de n variáveis.

Enunciado:

Sejam $x_i = x_i(t)$ $i = 1, \dots, n$ funções diferenciáveis em t_0. Seja $z = f(x_1, \dots, x_n)$ diferenciável em $P_0 = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$. Então $z(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t_0}$$

Generalização:

Sejam $z = f(x_1, \dots, x_n)$ onde

$x_1 = x_1(t_1, \dots, t_s)$

$\vdots$

$x_n = x_n(t_1, \dots, t_s)$

Temos então:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t_i}\right)(t_1^0, \dots, t_s^0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\right)(t_1^0, \dots, t_s^0) \ .$$

onde $P_0 = (x_1 (t_1^0, \dots, t_s^0), \dots, x_n (t_1^0, \dots, t_s^0))$.

Na prática, costuma-se escrever:

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \ .$$

Exemplo:

$$z = f(x, y) = e^{xy} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} x = x(r, s) = r + s \\ y = y(r, s) = r - s \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = e^{r^2 - s^2} \cdot 2r$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = e^{r^2 - s^2} \cdot (-2s)$$

Exercício: Seja $z = f(x, y) = \dfrac{2x + y}{y - 2x}$ onde $\begin{cases} x = 2u - 3v \\ y = u + 2v \end{cases}$

Calcular:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ (d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ (e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}$

no ponto $u = 2$ e $v = 1$.

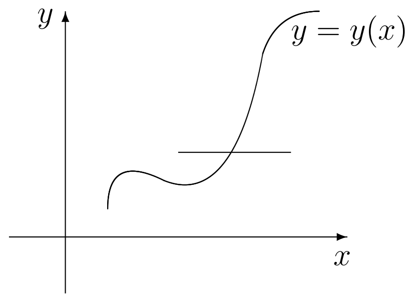
Respostas: (a) 7 (b) -14 (c) 21 (d) 112 (e) -49

Observação: É freqüente encontrar-se $z = f(x,y)$ com $y = y(x)$. Neste caso, $z = f(x, y(x)) = z(x)$. Ainda

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Portanto

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$



Exercícios 1.7.4:

1. (a) Mostre que para uma função $f(x,y)$ ter como curvas de nível circunferências com centro na origem é necessário e suficiente que $x\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = y\,\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

   Sugestão: as equações paramétricas da circunferência com centro na origem e raio a são:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \text{ sen } t \end{cases}$$

   (b) Dê dois exemplos de funções diferenciáveis na origem cujas curvas de nível sejam circunferências.

2. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Considere a curva $y = \phi(x) = x^3$ e calcule:

   (a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ (b) $\dfrac{dz}{dx}(1)$

1.7.5 Gradiente - Curva de Nível - Superfície de Nível

Definição 1.7.5. *Seja* $z = f(x,y)$ *com derivadas parciais no ponto* P*. Chamamos* ***gradiente de f no ponto*** $P=(x,y)$ *e indicamos por* $\nabla f(P)$ *ao vetor:*

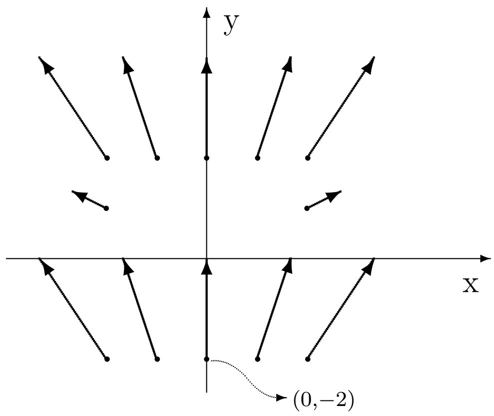
$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P \cdot \vec{j}$$

Se $w = f(x,y,z)$ *e* $P=(x,y,z)$ *então* $\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P \cdot \vec{k}$

Exemplos:

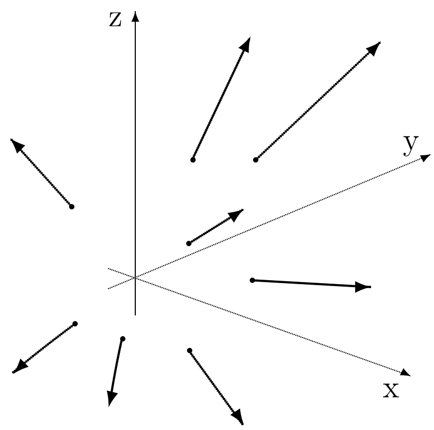
(1) $f(x,y) = \frac{1}{6}(x^2+y^3)$

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{3}\,x\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,y^2\,\vec{j}$$



(2) $g(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

$$\nabla g(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

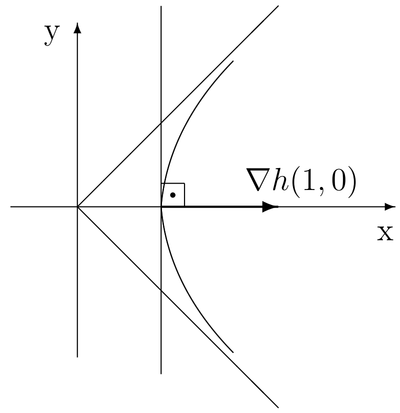


(3) $h(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla\, h(1,0) = 2\,\vec{i}$

Curva de Nível por $(1,0)$:

$\{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$



Neste exemplo notamos que $\nabla h(1,0)$ é normal à curva de nível de h que passa por (1,0). O resultado a seguir mostra que este fato, sob certas condições, é geral:

Teorema 1.7.6. *Seja $z = f(x,y)$ diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$ com $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$. Então $\nabla f(P_0)$ é normal à curva de nível γ que passa por P_0 (estamos supondo γ uma curva regular numa vizinhança de P_0).*

Prova:

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a curva de nível de $f(x,y)$ tal que $\gamma(t_0) = P_0$.

Assim temos que

$$z(t) = f(x(t), y(t)) \equiv k \qquad\qquad (*)$$

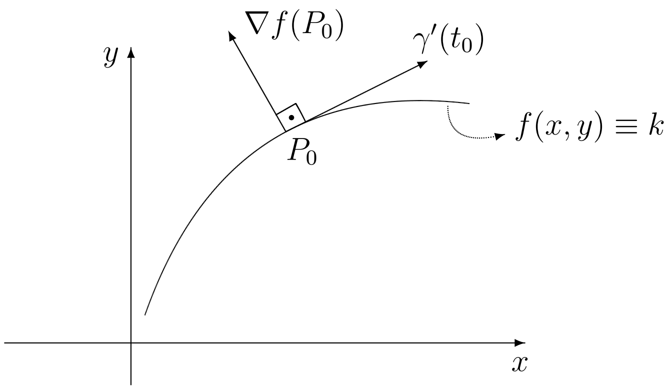
Como γ e f são diferenciáveis, podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os membros de $(*)$, obtendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} = 0$$

A equação anterior pode ser reescrita como

$$<\nabla f(P_0)\,,\ \gamma'(t_0)> \ = \ 0$$

Portanto, $\nabla f(P_0) \ \perp \ \gamma'(t_0)$

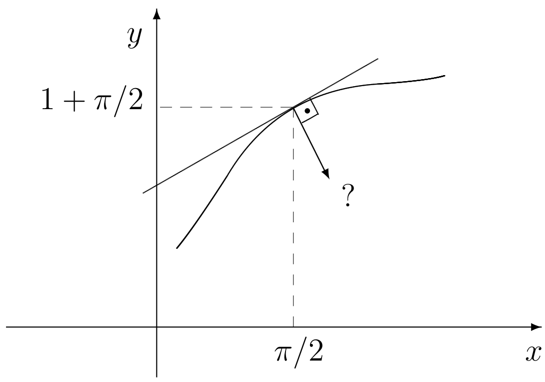


Exercício:

1. Achar um vetor normal à curva $y = x + \text{sen } x$ no ponto $x = \pi/2$.

   Resolução:

   1º modo:

   Definimos

   $F(x,y) = (x + \text{sen } x) - y$

   Temos que a curva considerada é uma curva de nível da função diferenciável F. Assim, para calcular um vetor normal basta calcular $\nabla F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right)$

   $$\nabla F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right) = \vec{i} - \vec{j}$$

   Portanto o vetor $\vec{i} - \vec{j}$ é normal à curva $y = x + \text{sen } x$ no ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$.

   2º modo:

   Uma equação vetorial da curva pode ser:

   $$\vec{r}(x) = x\,\vec{i} + (x + \text{sen } x)\vec{j}$$

   O vetor tangente é

   $$\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i} + (1 + \cos x)\vec{j}$$

No ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$ temos

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dx}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{i} + \vec{j}$$

Verifica-se que $\vec{\eta} = \vec{i} - \vec{j}$ é tal que

$$< \left(\frac{d\vec{r}}{dx}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) , \vec{\eta} > \; = \; 0 \Longleftrightarrow \eta \perp \left(\frac{d\vec{r}}{dx}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) .$$

Exercícios 1.7.5:

1. Achar as equações

   (a) da tangente

   (b) do plano normal à curva $\begin{cases} x = t - \cos t \\ y = 3 + \operatorname{sen} 2t \\ z = 1 + \cos 3t \end{cases}$ no ponto $t = \dfrac{\pi}{2}$

   Resposta: plano normal: $2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 2(y-3) + 3(z-1) = 0$.

2. Consideremos g e f tais que $g(x,y) = e^{x+y}$, $f'(0) = (1,2)$ e $f(0) = (1,-1)$. Calcular $F'(0)$, onde $F(t) = g(f(t))$.

3. Considere $f(x,y) = xy + 1$.

   (a) Desenhe as curvas de nível $f(x,y) \equiv 0$, $f(x,y) = 1$, $f(x,y) = 2$.

   (b) Desenhe alguns vetores gradientes de f.

   (c) O que acontece com $\nabla f(0,0)$ e com a curva de nível que passa por $(0,0)$?

4. Em cada um dos casos abaixo, desenhe um número suficiente de vetores para ilustrar o campo gradiente de f:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2)$

   (b) $f(x,y,z) = x + y + z$

   (c) $f(x,y,z) = 20 - z$

— / / — / / —

Vamos agora generalizar o resultado visto na última seção, para funções de 3 variáveis.

Suponhamos que S seja uma superfície com equação $F(x,y,z)=k$, ou seja, uma superfície de nível da função F, e seja $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ um ponto sobre S.

Seja ainda $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ uma curva arbitrária, contida na superfície S, tal que $\gamma(t_0)=P_0$.

Assim temos $F(x(t),y(t),z(t))=k \qquad (*)$.

Se γ e F são diferenciáveis podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados de $(*)$, como se segue:

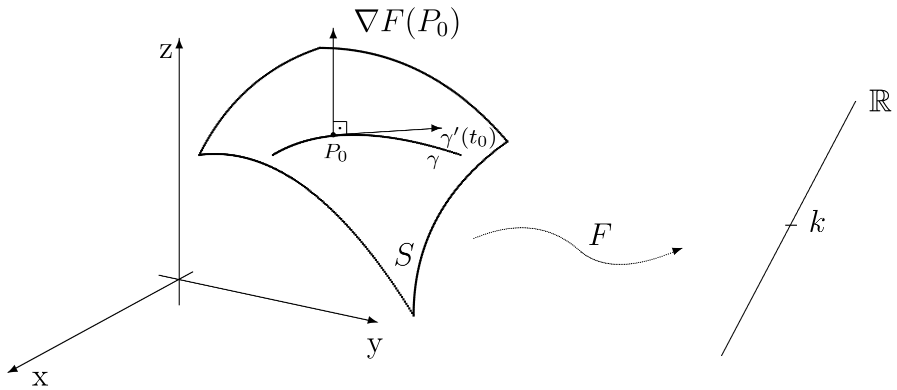
$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0$$

Como $\nabla F = (\,F_x\,,\,F_y\,,\,F_z\,)$ e $\gamma'(t)=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$ a equação anterior pode ser reescrita como

$$<\nabla F\,,\,\gamma'(t)\;>=0$$

Em particular, quando $t=t_0$, temos $\gamma(t_0)=(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ e assim

$$<\nabla F(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)\,,\,\gamma'(t_0)\;>=0$$



A equação anterior nos diz que o vetor gradiente em P_0, $\nabla F(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$, é normal ao vetor $\gamma'(t_0)$ de **qualquer** curva de nível γ em S com $\gamma(t_0)=P_0$.

Se $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{0}$ é natural definir o **plano tangente** à superfície de nível $F(x,y,z)=k$ em $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ como o plano que passa por P_0 e tem como vetor normal o vetor

$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Assim uma equação do plano tangente seria:

$$(*) \qquad F_x(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)(y - y_0) + F_y(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)(z - z_0) = 0$$

Observação: No caso especial em que S seja o gráfico de $z = f(x, y)$, com f diferenciável em (x_0, y_0) podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0 \quad \text{e}$$

entender S como uma superfície de nível (com $k = 0$) de F. Então

$$\begin{aligned} F_x(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) &= f_x(x_0\,,\,y_0) \\ F_y(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) &= f_y(x_0\,,\,y_0) \\ F_z(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) &= -1 \end{aligned}$$

Logo $(*)$ se torna

$$f_x(x_0\,,\,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0\,,\,y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

ou

$$z - z_0 = f_x(x_0\,,\,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0\,,\,y_0)(y - y_0)$$

Então, nossa nova, mais geral, definição do plano tangente é consistente com a definição que foi dada no caso de diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

Exemplos:

1. Dada a superfície regular

$$S : x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z\ ,$$

encontrar:

(a) Equação do plano tangente no ponto (1,2,-1).

(b) Equação da normal à superfície no mesmo ponto.

(c) Em que ponto a normal encontra o plano $x + 3y - 2z = 10$.

Resolução:

(a) Definimos

$F(x, y, z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z$ - diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$

Notamos que S é superfície de nível de F , pois $F(S) \equiv 0$

$\nabla F(1, 2, -1) = -6\vec{i} + 11\vec{j} + 14\vec{k}$

Pelo resultado anterior $\nabla F(1, 2, -1)$ é normal à superfície S no ponto $(1, 2, -1)$, e assim, a equação do plano tangente é

$$-6(x - 1) + 11(y - 2) + 14(z + 1) = 0\,,$$

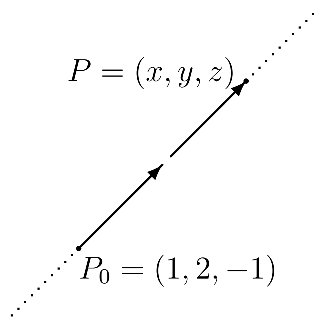
ou seja

$$6x - 11y - 14z + 2 = 0\,.$$

(b) $P - P_0 = t(-6, 11, 14)$

$(x - 1\,,\ y - 2\,,\ z + 1) = t(-6, 11, 14)$

$$\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 2 + 11t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 14t \end{cases}$$



(c) Substituindo um ponto geral da reta que é da forma $(1 - 6t\,,\ 2 + 11t\,,\ -1 + 14t)$ na equação do plano $x + 3y - 2z = 10$ temos

$(1 - 6t) + 3(2 + 11t) - 2(-1 + 14t) = 10$

$t = -1$

Portanto o ponto de encontro será $(7, -9, -15)$.

2. Dada a curva $(x, y, z) = (e^t\,,\ e^{-t}\,,\ \sqrt{2}\,t)$.

Qual a equação do plano normal à curva no ponto P , correspondente a $t = 0$?

Resolução: Em geral, plano normal à curva é o plano normal à tangente.

O ponto correspondente a $t = 0$ é $P_0 = (1, 1, 0)$.

Seja $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}\, t\vec{k}$. Então:

$$\frac{d\,\vec{r}}{dt}(t) = e^t\vec{i} - e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k}$$

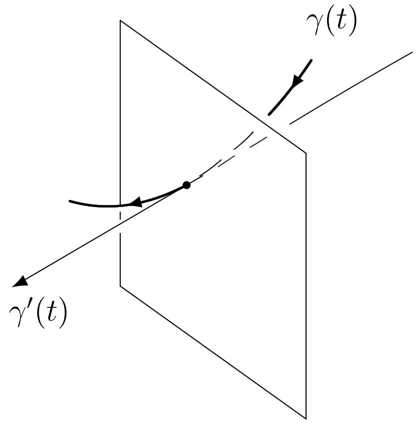
$$\frac{d\,\vec{r}}{dt}(0) = 1\vec{i} - 1\vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k} = \vec{v}$$

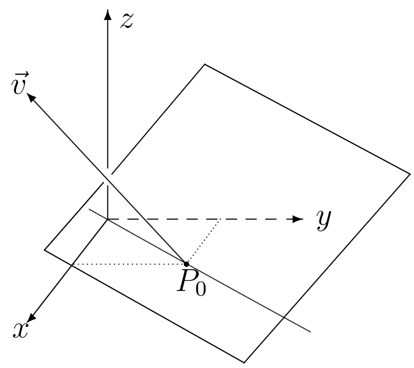
A equação do plano normal será do tipo

$1 \cdot (x-1) + (-1) \cdot (y-1) + \sqrt{2}\,(z-0) = 0$

ou seja

$x - y + \sqrt{2}\, z = 0$.





3. Dada a superfície $z = x^2 + 2xy + y^3$, determinar a reta normal no ponto $(1, 2, 13)$.

   Resolução:

   Definimos

   $F(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^3 - z$ - diferenciável em $\mathbb{R}^3$

   A superfície dada é uma superfície de nível de F.

   $\nabla F(1, 2, 13) = (6, 14, -1)$ é um vetor normal à superfície dada, no ponto $(1, 2, 13)$.

   Equação da reta normal

$$\begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 2 + 14\lambda \\ z = 13 - \lambda \end{cases}$$

Exercícios:

1. Determinar a equação do plano tangente à superfície $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 2, 5)$.

   Resp. $2x + 4y - z - 5 = 0$.

2. Determinar o plano tangente a $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ no ponto $(1, 2, 2)$.

   Resp. $x + 2y + 2z - 9 = 0$.

3. Ache um vetor normal e o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy + ye^x$ em $(x, y) = (1, 1)$. Resp. Plano: $(1 + e).(x - 1) + (1 + e).(y - 1) - 1.(z - (1 + e)) = 0$

4. Ache os pontos do parabolóide $z = x^2 + y^2 - 1$ nos quais a reta normal à superfície coincide com a reta que liga a origem a estes pontos. Resp. $z = -\dfrac{1}{2}$ ou $(0, 0, -1)$

5. Dar a equação do plano tangente à superfície regular $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36$ no ponto $(1, 2, 3)$. Resp. $x + 4y + 9z = 36$

6. Ache a equação do plano tangente à superfície $z = x^2 + 5xy - 2y^2$ no ponto $(1, 2, 3)$.

   Resp. $12x - 3y - z = 3$

7. Ache o plano tangente e a reta normal ao hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ no ponto $(2, -3, 3)$. Resp. Equação do plano: $2x - 3y - 3z = 4$

8. (a) Encontre a equação do plano tangente à superfície $f(x, , y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ no ponto $(1, 1, \sqrt{2})$. Resp. $x + y - \sqrt{2}\, z = 0$

   (b) Mostre que a superfície e o plano têm uma reta comum.

   Resp. Reta comum: $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 1, \sqrt{2})$

   (c) Qual é o ângulo entre esta reta e o vetor $\nabla f(1, 1, \sqrt{2})$? Resp. $\dfrac{\pi}{2}$

1.7.6 Derivada Direcional

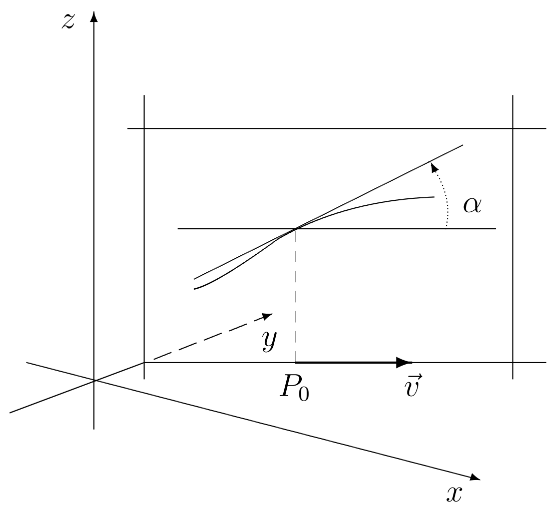
Definição 1.7.7. *Consideremos $z = f(x, y)$ definida em um aberto do $\mathbb{R}^2$ e seja $\vec{v} = (v_1, v_2)$ um vetor unitário ($\|\vec{v}\| = 1$). A* ***derivada direcional*** *de f no ponto P_0 na direção $\vec{v}$ é o valor do limite:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{v}) - f(P_0)}{t} \quad , \text{ quando este limite existir.}$$

Notação:

$$D_{\vec{v}} f(P_0) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right)(P_0)$$

$$D_{\vec{v}} f(P_0) = \text{tg } \alpha$$



Exemplos:

1. Dada a função $f(x,y) = x^2 - xy + 5y$, calcular $D_{\left(\frac{3}{5}\,,\,-\frac{4}{5}\right)} f(-1,2)$.

   Resolução:

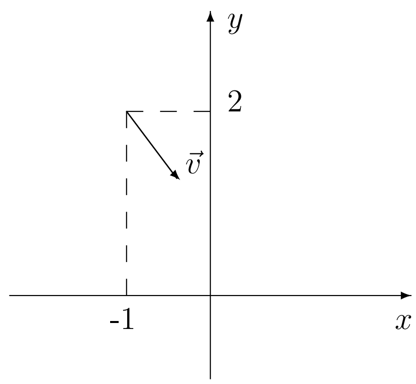
   Verifica-se que $\left\| \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5} \right) \right\| = 1$

   $f(P_0 + t\vec{v}) = \ldots = 13 - \dfrac{36}{5}\, t + \dfrac{21}{25}\, t^2$

   $f(-1,2) = 13$

   $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(P_0 + t\vec{v}) - f(P_0)}{t} = -\dfrac{36}{5}$

   Portanto, $D_{\left(\frac{3}{5}\,,\,-\frac{4}{5}\right)} f(-1,2) = -\dfrac{36}{5}$

2. $f(x,y,z) = 2xy - z^2$ (um exemplo para 3 variáveis)

   Calcular a derivada direcional em $(2,-1,1)$ na direção $\vec{v} = (3,1,-1)$.

   Observe que $\|\vec{v}\| = \sqrt{11}$

   $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}\,(3,1,-1)$

   $f(P_0 + t\,\vec{u}) = \ldots = -5 + \dfrac{5t^2}{11}$

   $f(P_0) = -5$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{5t}{11} = 0\,.$$

Exercícios:

1. Prove que $D_{\vec{i}} f(a,b) = f_x(a,b)$

   $D_{\vec{j}} f(a,b) = f_y(a,b)$

   Vejamos a resolução de $D_{\vec{i}} f(a,b)$

   $\vec{i} = (1,0)$

   $$D_{\vec{i}} f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f[(a,b) + t(1,0)] - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = f_x(a,b)$$

2. Responda: se $D_{\vec{v}} f(P_0) = k$ então $D_{-\vec{v}} f(P_0) = ?$ (Resp.: $-k$).

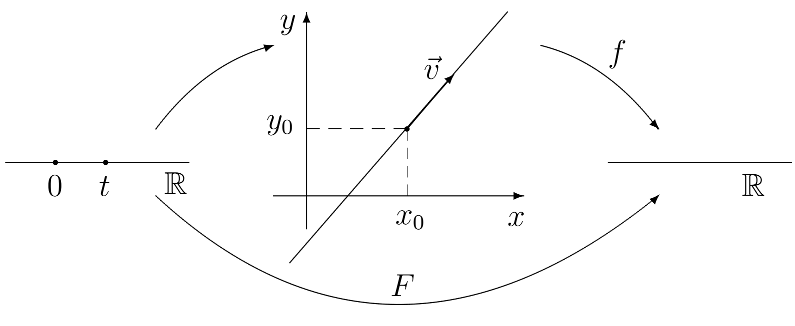
Teorema 1.7.8. *Consideremos $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com A aberto e f diferenciável em $P_0 \in A$. Para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ com $\|\vec{v}\| = 1$, existe a $D_{\vec{v}} f(P_0)$ e ainda:*

$$D_{\vec{v}} f(P_0) = < \nabla f(P_0), \vec{v} >$$

Prova:

Sejam $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ fixos.

Consideremos a função $F(t) = f(x_0 + tv_1\,,\, y_0 + tv_2)$ onde t é tal que $(x_0 + tv_1\,,\, y_0 + tv_2) \in A$.



F pode ser vista como composta de funções e como tal ela é diferenciável no ponto $t = 0$.

Usando a Regra da Cadeia obtemos:

$$F'(0) = f_x(x_0, y_0)v_1 + f_y(x_0, y_0)v_2 = < \nabla f(P_0)\,,\, \vec{v} >$$

mas

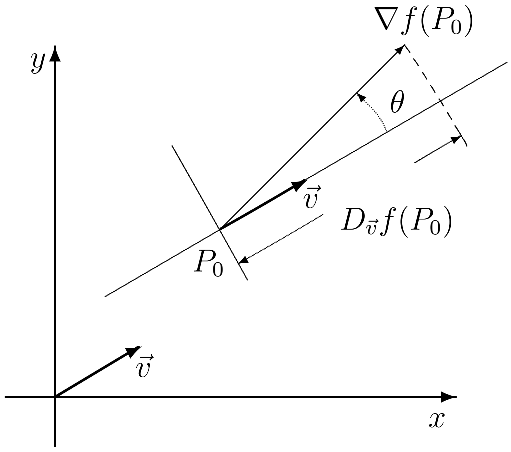
$$F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv_1\,,\, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t} = D_{\vec{v}} f(P_0)$$

Assim

$$D_{\vec{v}}\, f(P_0) = \ < \nabla f(P_0)\,,\, \vec{v} >$$

Observação 1: Temos: Se f for diferenciável em P_0, então a derivada direcional $D_{\vec{v}}\, f(P_0)$ é a projeção escalar do $\nabla f(P_0)$ na direção $\vec{v}$, quando f é.

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}\, f(P_0) &= \|\nabla f(P_0)\| \; \|\vec{v}\| \;\cos\theta \;= \\ &= \|\nabla f(P_0)\| \;\cos\theta \end{aligned}$$



Observação 2: O teorema afirma que se f é diferenciável em um ponto P_0, então f tem todas as derivadas direcionais em P_0. E a recíproca, é verdadeira?

Vejamos um exemplo em que f tem todas as derivadas direcionais em P_0, mas f não é diferenciável em P_0.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Seja $\vec{v} = (v_1, v_2)$ com $\|\vec{v}\| = 1$.

$$D_{\vec{v}}\, f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1\,|tv_2|}{t\sqrt{t^2(v_1^2+v_2^2)}} = \frac{v_1\,|v_2|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = v_1\,|v_2|$$

Em particular:

$$f_x(0,0) = D_{\vec{i}} f(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = D_{\vec{j}} f(0,0) = 0\,.$$

Ainda se

$$\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = df(0,0)(x,y) + \eta \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 0 + \eta \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

então

$$\eta = \frac{x\,|y|}{x^2+y^2} \not\to 0 \quad , \; com \quad (x,y) \to (0,0)$$

Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$.

De maneira análoga define-se derivada direcional para funções de 3 ou mais variáveis. Resultados análogos aos anteriores permanecem válidos.

Exercícios:

1. Supondo f diferenciável, quando a derivada direcional é máxima e quando é mínima?

   Resolução:

   Admitamos $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$

   $D_{\vec{v}}\, f(P_0) = \|\nabla f(P_0)\| \, \cos\theta\,.$

   Logo, é máxima quando $\cos\theta = 1 \Longleftrightarrow \theta = 0\,.$

   Portanto $D_{\vec{v}}\, f(P_0)$ é máxima quando $\vec{v}$ tem o mesmo sentido de $\nabla f(P_0)$.

   É mínima quando $\cos\theta = -1 \Longleftrightarrow \theta = \pi\,.$

   Portanto $D_{\vec{v}}\, f(P_0)$ é mínima quando $\vec{v}$ tem sentido oposto ao de $\nabla f(P_0)$.

2. Supondo f diferenciável, quando a derivada direcional é nula ?

   Resolução:

   $D_{\vec{v}}\, f(P_0) = \|\nabla f(P_0)\| \, \cos\theta = 0$

   $\nabla f(P_0) = \vec{0} \quad$ ou $\quad \cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

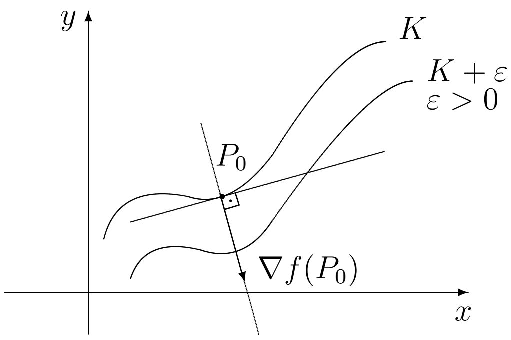


Ilustração para o caso $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Portanto se $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$ a derivada direcional é nula na direção normal ao $\nabla f(P_0)$, logo, na direção de uma curva ou de uma superfície de nível.

3. Seja $w = f(x, y, z) = 2xy - z^2$.

   Calcular a derivada direcional de w no ponto $P_0 = (2, -1, 1)$, no sentido de $\vec{v} = (2, 2, 1)$.

   Resolução:

   Observemos que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$, uma vez que é uma polinomial, e que $\|\vec{v}\| = 3$.

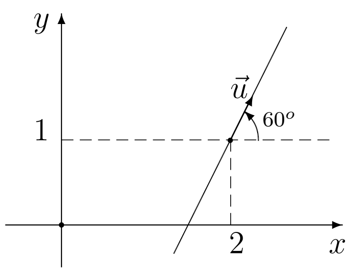
   Façamos $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

   $\nabla f(P_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

   $D_{\vec{u}} f(P_o) = < \nabla f(P_0), \vec{u} > = \dfrac{2}{3}$

4. A temperatura num ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y) = \dfrac{100xy}{x^2 + y^2}$.

   (a) Calcule a derivada direcional no ponto (2.1), no sentido que faz um ângulo de 60^o com o semi-eixo positivo dos x.



   (b) Em que direção, a partir de (2,1) é máxima a derivada direcional?

   (c) Qual o valor deste máximo?

Resolução:

(a) Consideremos $\vec{u} = \frac{1}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{j}$ - vetor unitário na direção de interesse.

Observemos que T é diferenciável em $(2,1)$, uma vez que as suas derivadas parciais são continuas neste ponto.

$\nabla T(2,1) = \ldots = -12\vec{i} + 24\vec{j}$

$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(2,1) \; = \; < \nabla T(2,1)\,,\, \vec{u} > \; = -6 + 12\sqrt{3}$

(b) É máxima no sentido do gradiente, isto é, do vetor $-12\,\vec{i} + 24\,\vec{j}$

(c) O máximo é o módulo do gradiente $\; = \; 12\sqrt{5}\,.$

5. Achar a derivada direcional de $F(x,y,z) = x^2yz^3$ ao longo da curva $(e^{-t}\,,\, 2\text{sen } t + 1\,,\, t - \cos t)$, no ponto P_0, onde $t = 0$.

Resolução:

No instante $t = 0$ o ponto P_0 correspondente é $P_0 = (1,1,-1)$.

Temos que $\nabla F(x,y,z) = (2xyz^3\,,\, x^2z^3\,,\, 3x^2yz^2)$.

Assim $\nabla F(P_0) = -2\,\vec{i} - \vec{j} + 3\,\vec{k}$

O vetor posição da curva é dado por $\vec{r}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + (2\text{sen } t + 1)\vec{j} + (t - \cos t)\vec{k}$

Logo, o vetor tangente à curva é:

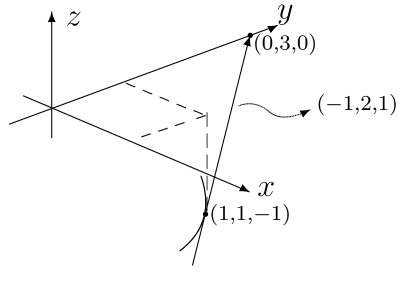
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = e^{-t}\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + (1 + \text{sen } t)\vec{k}$$

Calculado no ponto correspondente a $t = 0$ temos $-1\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$.

Seja $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$ - vetor unitário na direção de interesse.

Como F é diferenciável em P_0, pelo Teorema 1.7.8 temos

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(P_0) = < \nabla F(P_0)\,,\, \vec{u} > = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Exercícios 1.7.6:

1. Ache o valor absoluto da derivada direcional em (1,0,1) da função $f(x, y, z) = 4x^2y+y^2z$ na direção normal em (1,1,1) à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

2. Se a temperatura em um ponto (x, y, z) de uma bola sólida de raio 3 centrada em (0,0,0) é dada por $T(x, y, z) = yz + zx + xy$ ache a direção, a partir de (1,1,2), na qual a temperatura cresce mais rapidamente.

3. Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}^2$, qual o significado geométrico para o fato de $\nabla f(x, y) = 0$
   (a) em um ponto;
   (b) em todos os pontos.

4. Se $f(x, y) = x^2 - y^2$, calcule a derivada direcional de f na direção $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ no ponto $(1, 1)$.

5. Se $f(x, y) = e^{x+y}$, calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 1)$ na direção da curva definida por $g(t) = (t^2, t^3)$ em $g(2)$ para t crescendo.

6. A temperatura num ponto (x, y) do plano xy é dada por $T = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.
   (a) Calcule a derivada direcional no ponto (1,2) no sentido que faz um ângulo de 45^o com o semi-eixo positivo dos x.
   (b) No sentido de P para Q onde $P = (x, y)$ e $Q = (0, 0)$, no ponto P.

7. Suponha que você esteja sentado no ponto $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{3}{4}\right)$ de uma superfície que tem por equação $z = -x - 2y$. Qual é a direção em que você deve começar a escorregar para atingir o plano xy o mais depressa possível?

8. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Observe que $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$, o que deixa de indicar qual a direção em que temos o máximo crescimento de $f(x, y)$ a partir de $(0, 0)$. Isto é razoável? O que acontece em uma vizinhança de $(0, 0)$?

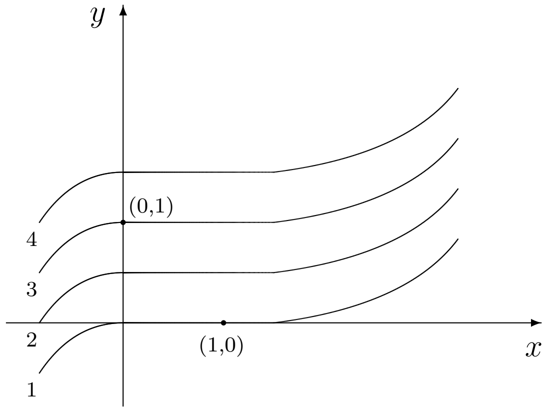
9. A interseção do gráfico da função diferenciável $z = f(x, y)$ com o plano $x = 1$ é uma reta. O gráfico, a seguir, representa curvas de nível de f.
   Calcule:

(i) $f_x(1,0)$

(ii) $f_y(1,0)$

(iii) $D_{\vec{v}}f(1,0)$ onde $\vec{v} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$

(iv) Levando em conta direção, sentido e módulo, desenhe o vetor gradiente de f no ponto $(1,0)$.



10. A interseção do gráfico da função diferenciável $z = f(x,y)$ com o plano $y = 1$ é uma reta.

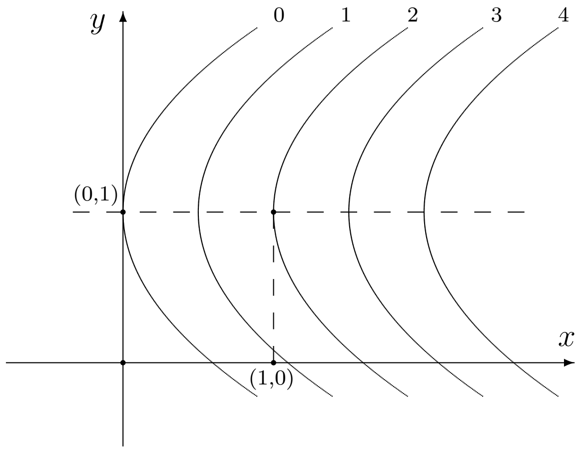
O gráfico a seguir representa curvas de nível de f . Calcule:

(a) $f_x(1,1)$

(b) $f_y(1,1)$

(c) $D_{\vec{v}}f(1,1)$ onde $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$

(d) Levando em conta direção, sentido e módulo, desenhe o vetor gradiente de f em $(1,1)$.



11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Mostre que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ mas que o gráfico de f não tem plano tangente em $(0,0)$.

12. Considere $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    (a) Mostre que f tem derivada direcional, em qualquer direção, em $(0,0)$.

    (b) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

13. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    (a) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

    (b) Considere $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = (0,0)$. Mostre que $f \circ \gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em todos os pontos de $(-1,1)$.

    (c) Compare com o resultado enunciado na Regra da Cadeia.

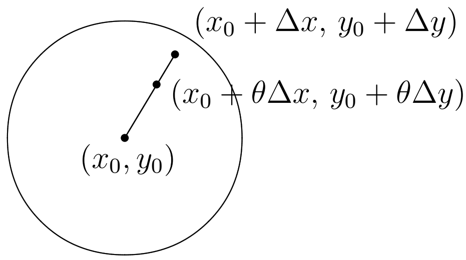
1.8 Teoremas: Valor Médio e Taylor

Teorema 1.8.1 (Teorema do Valor Médio). *Seja $z = f(x,y)$ diferenciável em uma vizinhança $A = B(P_0, r)$ de $P_0 = (x_0, y_0)$. Então, se Δx e Δy são tais que $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \in A$, temos que:*

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta x f_x(x_0 + \theta\Delta x\,,\ y_0 + \theta\Delta y) + \Delta y f_y(x_0 + \theta\Delta x\,,\ y_0 + \theta\Delta y)\,,$$

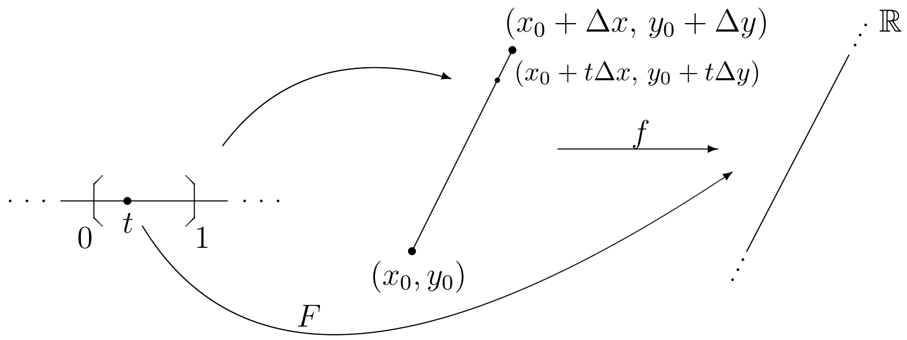
onde $0 < \theta < 1$.

Observação: O teorema afirma que a diferença entre os valores da função nos pontos $(x_0 + \Delta x\,,\ y_0 + \Delta y)$ e (x_0, y_0) é igual à diferencial em um ponto intermediário na linha que une os dois pontos. Note ainda que este teorema é uma generalização do Teorema do Valor Médio para funções de uma variável.



Prova: Consideremos a função

$F(t) = f(x_0 + t\Delta x\,,\ y_0 + t\Delta y)$ (é uma função de t, pois estamos considerando x_0, y_0, Δ_x e Δy fixados).



F é uma função composta e como tal é diferenciável em $(0,1)$ e contínua em $[0,1]$.

Pelo Teorema do Valor Médio, para uma variável, temos:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)(1-0), \text{ onde } \quad 0 < \theta < 1\,.$$

Pela Regra da Cadeia:

$$F(1) - F(0) = f_x(x_0 + \theta\Delta x\,,\ y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \theta\Delta x\,,\ y_0 + \theta\Delta y)\Delta y$$

Logo:

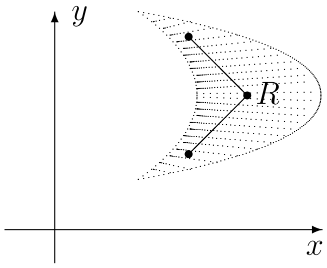
$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x\,,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0 + \theta\Delta x\,,\ y_0 + \ \theta\Delta y)\Delta x + \\ &+ \ f_y(x_0 + \theta\Delta x\,,\ y_0 + \theta\Delta y)\Delta y\ , \end{aligned}$$

onde $0 < \theta < 1$.

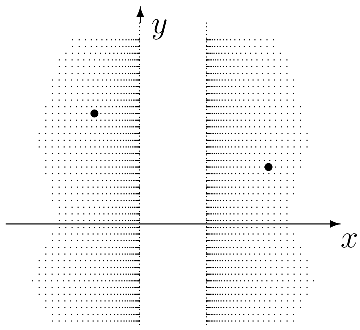
Exemplos:

(1) Toda função $f(x, y)$ cujas derivadas parciais f_x e f_y existam e tenham o valor 0 em qualquer ponto de uma região R , é uma constante em R .

Região: conjunto aberto com a propriedade que dois pontos quaisquer podem ser ligados por uma poligonal contida no conjunto.



Região

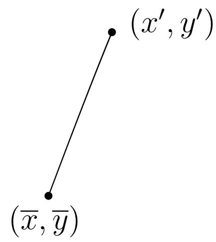


Não é Região

Sejam $(\overline{x}, \overline{y})$ e $(x', y') \in R$ tais que exista um segmento contido em R ligando-os.

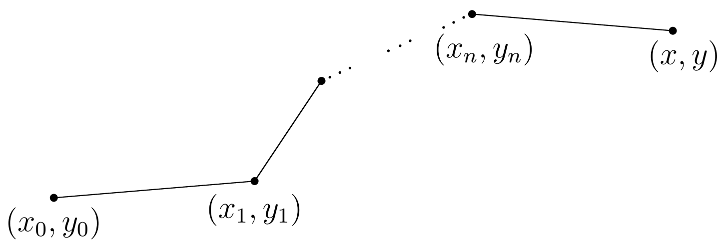
Pelo Teorema do Valor Médio:

$f(\overline{x}, \overline{y}) - f(x', y') = 0 \Longleftrightarrow f(\overline{x}, \overline{y}) = f(x', y')$



Fixemos agora $(x_0, y_0) \in R$. Seja $(x, y) \in R$, arbitrário.

A situação é do tipo:



onde cada segmento está contido em R. Assim,

$$f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1) = \ldots = f(x_n, y_n) = f(x, y).$$

$$\therefore\ \forall\,(x, y) \in R \quad f(x, y) \equiv f(x_0, y_0).$$

Desafio: Mostre que se tirarmos a hipótese de R ser uma região a conclusão não é mais verdadeira. Dê um exemplo para quando trabalhamos com uma variável e outro para duas variáveis.

(2) Demonstre que

$$\ell n\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)}$$

onde $0 < \theta < 1, \quad x, y > 0$

Resolução:

Seja $f(x, y) = \ell n\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \ ; \quad x, y > 0$

$f_x(x, y) = f_y(x, y) = \dfrac{1}{x+y}$.

f_x e f_y são contínuas para $x, y > 0$, e assim, f é diferenciável em $\forall\,(x, y);\ x, y > 0$.

$f(1, 1) = 0$

$\Delta x = x - 1 \qquad \Delta y = y - 1$

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(1, 1) &= f_x(1+\theta\Delta x\,,\ 1+\theta\Delta y)\Delta x + f_y(1+\theta\Delta x\,,\ 1+\theta\Delta y)\Delta y \ = \\ &= \frac{x-1}{\theta\Delta x+\theta\Delta y+2} + \frac{y-1}{\theta\Delta x+\theta\Delta y+2} = \\ &= \frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)}\ , \quad 0 < \theta < 1\,. \end{aligned}$$

Cuidado: Note que θ não é fixo. Depende de x e de y.

— ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ —

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^n sobre I e seja $x_0 \in I$. Entre todas as polinomiais de grau n existe exatamente uma que iguala f em x_0 através da n-ésima derivada, isto é,

$$(*) \qquad P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Esta polinomial será chamada **polinomial de Taylor** em x_0 de grau n, e denotaremos por P_{n,x_0}.

Quando $n = 1$, a polinomial de Taylor em x_0 de grau 1, é justamente a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$.

$$P_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Quando $n = 2$, P_{2,x_0} é uma parábola que tem a mesma tangente de f em $(x_0, f(x_0))$ e a mesma curvatura de f em $(x_0, f(x_0))$.

Escrevendo $P_{2,x_0}(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2$ e impondo as condições $(*)$, temos:

$$P_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \,.$$

Em geral,

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \,.$$

Se desejarmos estudar como esta polinomial aproxima f nos pontos do intervalo I, precisamos estudar o resto

$$R_n(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x) \,.$$

O Teorema a seguir, conhecido como Teorema de Taylor expressa, este resto em termos de f.

Teorema de Taylor (para uma variável)

Seja f de classe C^{n+1} em uma vizinhança de x_0. Então, para algum τ entre x e x_0, temos:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \,.$$

Observação 1: Se temos uma limitação em $f^{(n+1)}(\tau)$, podemos calcular o possível erro cometido, com a aproximação de f pela polinomial de Taylor $P_{n,x_0}(x)$.

Observação 2: Quando $n = 0$, temos:

$f(x) = f(x_0) + f'(\tau)(x - x_0)$, que é o Teorema do Valor Médio.

Exemplo:

Encontrar uma polinomial que aproxima e^x sobre o intervalo $[-1, 1]$, com erro menor que $0,005$.

Resolução: Seja $x_0 = 0$ e $f(x) = e^x$.

$$P_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Ainda:

$$e^x - P_{n,0}(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = e^{\tau}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para x e $\tau \in [-1, 1]$, temos:

$$|R_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Queremos que $|R_n(x)| \leq 0,005$.

Escolhemos então n , tal que:

$$\frac{e}{(n+1)!} \leq 0,005$$

ou seja, $e = 2,718\ldots \leq (0,005)(n+1)!$

Observemos que $n = 5$ satisfaz esta desigualdade.

Logo, a polinomial

$$P_{5,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

tem a propriedade desejada.

O Teorema de Taylor se generaliza para funções de mais de uma variável, da seguinte maneira:

Teorema 1.8.2. *Seja $z = f(x, y)$, de classe C^{n+1} numa vizinhança $A = B(P_0, r)$ do ponto $P_0 = (x_0, y_0)$. Então,*

$$f(x_0 + \Delta x\, ,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [\Delta x\, f_x(P_0) + \Delta y\, f_y(P_0)] \;+$$

$$+\;\; \frac{1}{2!}\,[\Delta x\, f_x(P_0) + \Delta y\, f_y(P_0)]^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\,[\Delta x\, f_x(P_0) + \Delta y\, f_y(P_0)]^n \;+$$

$$+\;\; \frac{1}{(n+1)!}\,[\Delta x\, f_x(x_0 + \theta\Delta x\, ,\, y_0 + \theta\Delta y) + \Delta y\, f_y(x_0 + \theta\Delta x\, ,\, y_0 + \theta\Delta y)]^{n+1}$$

com $0 < \theta < 1$, $(x_0 + \Delta x\,,\, y_0 + \Delta y) \in A$ *e onde estamos convencionando o seguinte:*

$$f_x \cdot f_x = f_{xx}$$
$$f_y \cdot f_x = f_{yx}$$
$$f_y \cdot f_y = f_{yy}$$

A prova deste teorema pode ser feita análoga à do Teorema do Valor Médio, isto é, definindo

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x\,,\, y_0 + t\Delta y), \quad t \in [0,1]$$

e aplicando o Teorema de Taylor (para funções de uma variável) à F.

Exercícios:

1. Desenvolver $f(x,y) = x^2y + 3y - 2$ segundo potências de $(x-1)$ e $(y+2)$.

   Resolução:

   Apliquemos a fórmula de Taylor com $P_0 = (1,-2)$

   $\Delta x = x - 1$ $\qquad\qquad$ $\Delta y = y + 2$

$$f_x = 2xy \begin{cases} f_{xx} = 2y \begin{cases} f_{xxx} = 0 \\ f_{xxy} = 2 \end{cases} \\ \\ f_{xy} = 2x \begin{cases} f_{xyx} = 2 \\ f_{xyy} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$f_y = x^2 + 3 \begin{cases} f_{yx} = 2x \begin{cases} f_{yxx} = 2 \\ f_{yxy} = 0 \end{cases} \\ \\ f_{yy} = 0 \end{cases}$$

   Assim: $f(1,-2) = -10$, $f_x(1,-2) = -4$, $f_y(1,-2) = 4, \ldots$.

   Logo,

$$f(x,y) = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2)$$

2. Escreva $f(x, y) = x^2y + x^3 + y^3$ como uma polinomial em $(x-1)$ e $(y+1)$.

Resposta: $f(x, y) = -1 + (x-1) + 4(y+1) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) - 3(y+1)^2 + (x-1)^3 + (x-1)^2(y+1) + (y+1)^3$

3. Seja $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Calcular o desenvolvimento de Taylor em $(0, 0)$ até os termos de segunda ordem.

Resolução: Temos

$f_x(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ e $f_y(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

Assim: $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

Ainda temos: $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 1$ e $f_{xy}(0, 0) = 0$

Logo:

$$P_{2,(0,0)}(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

4. Encontre uma aproximação quadrática de $f(x, y) = xseny$ perto da origem. Qual a precisão da aproximação se $|x| \leq 0,1$ e $|y| \leq 0,1$?

Resolução:

Sabemos que

$f(x, y) = f(0, 0) + (\ xf_x + yf_y\ ) + \dfrac{1}{2}\ (\ x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy}\ ) + \dfrac{1}{6}\ (\ x^3f_{xxx} + 3x^2yf_{xxy} + 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy}\ )_{(cx,\ cy)}$

Neste caso:

$$\begin{array}{ll} f_x(0, 0) = seny|_{(0,0)} = 0 & f_y(0, 0) = xcosy|_{(0,0)} = 0 \\ f_{xx}(0, 0) = 0|(0, 0) = 0 & f_{xy}(0, 0) = cosy|_{(0,0)} = 1 \\ f_{xy}(0, 0) = -xseny|_{(0,0)} = 0 & \end{array}$$

Logo:

$$xseny \simeq 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(x^2.0 + 2xy.1 + y^2.0)$$
$$xseny \simeq xy$$

O erro cometido na aproximação é:

$$R_2(x,\ y) = \frac{1}{6}\ (\ x^3.0 + 3x^2y.0 + 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy})|_{(cx,\ cy)}$$

As derivadas $f_{xyy}(x,y) = -seny$ e $f_{yyy}(x,y) = -xcosy$ não ultrapassam 1 em valor absoluto. Ainda, $|x| \leq 0,1$ e $|y| \leq 0,1$ e assim,

$$R_2(x,y) \leq \frac{1}{6}(\ 3.(0,1)^3 + (0,1)^3\ ) = \frac{4}{6}.(0,1)^3 \leq 0,00067$$

Exercícios:

1. Calcular o desenvolvimento de Taylor até os termos de terceira ordem de $f(x,y) = e^{xy}$, no ponto $P_0 = (1,-1)$.

2. Considere $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ onde a,b,c,d,e,f são constantes. Escreva o desenvolvimento de Taylor de f no ponto $(0,0)$, até os termos do segundo grau. O resultado a que você chegou é mais geral. Toda polinomial de grau n coincide com o seu desenvolvimento de Taylor de ordem n.

3. Desenvolver $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^3}$ segundo potências de $(x-1)$ e $(y+1)$, até os termos do segundo grau, inclusive.

4. Encontre uma aproximação quadrática de $f(x,y) = cosxcosy$ na origem. Estime o erro na aproximação se $|x| \leq 0,1$ e $|y| \leq 0,1$.

1.9 Máximos e Mínimos

Definição 1.9.1. $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *A-aberto.*

a) $P_0 \in A$ *é um* ponto de máximo local *de* f *se existir uma vizinhança* V *de* P_0 *tal que* $f(P) \leq f(P_0)$, $\forall\ P \in V \cap A$ *(analogamente* ponto de mínimo local*).*

b) P_0 *é ponto de* máximo absoluto *de* f *se para todo* $p \in A$, $f(P) \leq f(P_0)$ *(analogamente ponto de* mínimo absoluto*).*

c) P_0 *é* ponto crítico (ou estacionário) *de* f *se* $f_{x_i}(P_0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 1.9.2. *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *onde* A *é aberto e* f *é diferenciável em* $P_0 \in A$.

Se P_0 *é um ponto de máximo (ou de mínimo) local de* f, *então* P_0 *é ponto crítico de* f, *ou seja, as equações abaixo estão satisfeitas:*

$$(I)\begin{cases} f_{x_1}(P_0) = 0 \\ f_{x_2}(P_0) = 0 \\ \vdots \\ f_{x_n}(P_0) = 0 \end{cases}$$

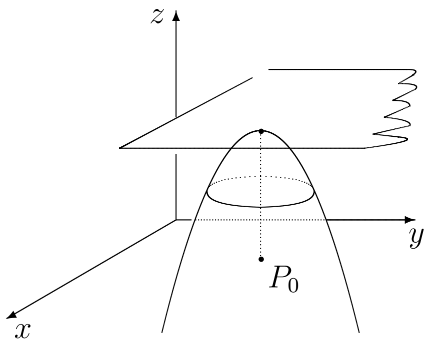


Ilustração para $n = 2$

Prova: $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

Seja P_0 um ponto de máximo (ou de mínimo) local de f.

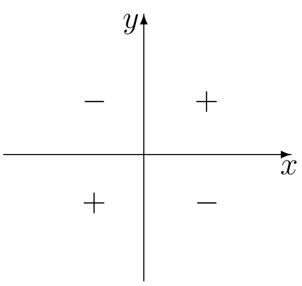
Consideremos $f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ - função de uma variável. $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ é ponto de máximo (ou de mínimo) local desta função de uma variável. Logo, $f_{x_1}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$.

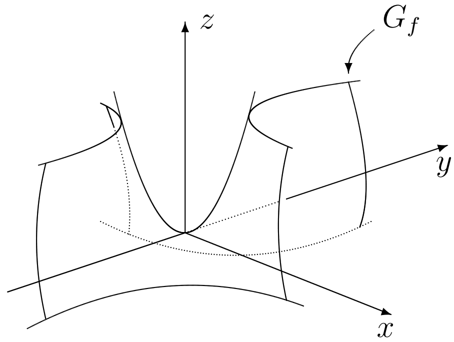
Analogamente para $x_2, \ldots, x_n$. ■

Observação: As equações (I) não são suficientes, isto é, podemos ter um ponto estacionário que não seja ponto de máximo ou de mínimo.

Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$.

$(0, 0)$ é ponto estacionário de f mas não é ponto de máximo ou de mínimo de f.





Quais seriam então as condições suficientes para garantir a natureza de um ponto estacionário de uma função?

O Teorema a seguir dá a resposta para o caso de duas variáveis.

Teorema 1.9.3. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f de classe C^2. Suponhamos que no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ tenhamos:*

$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$

$H(P_0) = f_{xx}(P_0) f_{yy}(P_0) - [f_{xy}(P_0)]^2 > 0$

Então P_0 é ponto extremo e

i) Se $f_{xx}(P_0) < 0$, então P_0 é ponto de máximo local.

ii) Se $f_{xx}(P_0) > 0$, então P_0 é ponto de mínimo local.

Se $H(P_0) = f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - [f_{xy}(P_0)]^2 < 0$, então o ponto estacionário não será nem ponto de máximo e nem de mínimo [neste caso P_0 é chamado ponto de sela].

Se $H(P_0) = 0$, nada se pode afirmar.

Prova: Para $H(P_0) > 0$ e $f_{xx}(P_0) < 0$.

Como f é de classe C^2, temos garantida a existência de uma vizinhança V de P_0 tal que $f_{xx}(P) < 0$ e $H(P) > 0, \ \forall\, P \in V$.

Pelo Teorema de Taylor temos:

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x\,,\, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \;=\; & \frac{1}{2}\Big[(\Delta x)^2 f_{xx}(x_0+\theta\,\Delta x\,,\, y_0+\theta\,\Delta y) \,+ \\ & + 2\Delta x\,\Delta y\, f_{xy}(x_0+\theta\,\Delta x\,,\, y_0+\theta\,\Delta y) \,+ \\ & + (\Delta y)^2 f_{yy}(x_0+\theta\,\Delta x\,,\, y_0+\theta\,\Delta y)\Big], \end{aligned}$$

onde $0 < \theta < 1$.

Completando o quadrado e condensando a notação, vem:

$$f(x_0+\Delta x\,,\, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \underbrace{\frac{1}{2}\,f_{xx}}_{<0}\left[\underbrace{\left(\Delta x + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}\,\Delta y\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{f_{xx}\,f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2}\right)}_{>0}(\Delta y)^2\right]$$

Assim,

$$f(x_0+\Delta x\,,\, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \leq 0$$

Portanto, $P_0 = (x_0,y_0)$ é ponto de máximo local. ■

Observe que o mesmo tipo de prova serve para $H(P_0) > 0$ e $f_{xx}(P_0) > 0$ e neste caso P_0 será ponto de mínimo local.

Observação:

$$\begin{aligned} H(P) \;&=\; f_{xx}(P)\,\cdot\, f_{yy}(P) - (f_{xy}(P))^2 \;= \\ &= \begin{vmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

é chamado hessiano de f em P.

Obs.: O Teorema anterior se generaliza para 3 ou mais variáveis, com as devidas adaptações. O leitor interessado pode consultar textos mais avançados.

Exercícios resolvidos

1. Encontrar os pontos de máximo e mínimo locais das funções:

   a) $z = f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$

   Resolução :

   Notemos que f é de classe C^2

   $f_x(x,y) = 2(x-1)$

   $f_y(x,y) = 4y$

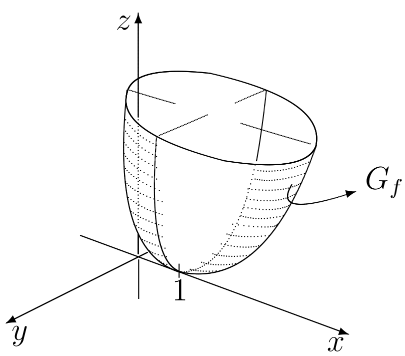
   Logo, o único ponto estacionário é $(1,0)$

$$H(1,0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(1,0) & f_{xy}(1,0) \\ f_{yx}(1,0) & f_{yy}(1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

   Ainda: $f_{xx}(1,0) = 2 > 0$.

   Logo, (1, 0) é ponto de mínimo local.

   Obs.: Neste caso particular, podemos observar que o gráfico de f tem o aspecto a seguir .



   b) $z = f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$

   Analogamente, o único ponto estacionário é (1, 0).

$H(1,0) = -8 < 0\,.$

Portanto, (1,0) é ponto de sela e assim, não existem pontos extremos.

Qual seria o gráfico de f? Procure desenhá-lo.

2. Classificar os pontos críticos da função $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

   Resolução :

   Notemos que f é de classe C^2.

   $f_x(x,y) = 3y^2 + 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

   $f_y(x,y) = 6xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

   Assim os pontos críticos são: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$.

   Observemos que

$$H(x,y) \;=\; \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} \;=\; 36x^2 - 36y^2$$

   (i) Análise para o ponto $(0,1)$:

   $H(0,1) = -36 \;<\; 0$

   Logo $(0,1)$ é ponto de sela.

   (ii) Análise para o ponto $(0,-1)$:

   $H(0,-1) = -36 \;<\; 0$

   Logo $(0,-1)$ é ponto de sela.

   (iii) Análise para o ponto $(1,0)$:

   $H(1,0) = 36 \;>\; 0$ e $f_{xx}(1,0) = 6 > 0$

   Logo $(1,0)$ é ponto de mínimo local de f.

   (iv) Análise para o ponto $(-1,0)$:

   $H(-1,0) = 36 > 0$ e $f_{xx}(-1,0) = -6 < 0$

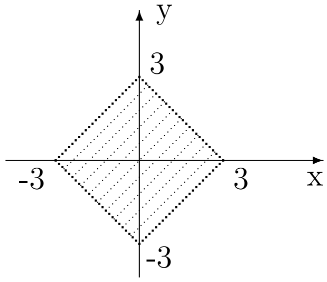
   Logo $(-1,0)$ é ponto de máximo local de f.

   Notemos ainda que: $f(1,0) = -2$, $f(-1,0) = 2$ e $f(0,1) = f(0,-1) = 0$. Tente visualizar como seria o gráfico de f. Você poderia usar um programa computacional para traçar o gráfico.

3. Seja $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y$. Analisar os pontos de máximos e mínimos locais de f no conjunto aberto $A = \{(x,y) \in R^2, \quad |x| + |y| < 3\}$

Resolução:

Inicialmente observamos que o conjunto A tem o aspecto dado ao lado.



Notemos que f é de classe C^2

$f_x(x,y) = 6x^2 - 6 = 0$

$f_y(x,y) = 6y^2 - 6 = 0$

Assim os pontos críticos são: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$.

Observemos que

$$H(x,y) \;=\; \begin{vmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 12y \end{vmatrix} \;=\; 144xy$$

(i) Análise para o ponto $(1,1)$:

$H(1,1) = 144 > 0 \quad$ e $\quad f_{xx}(1,1) = 12 > 0$

Logo $(1,1)$ é ponto de mínimo local de f.

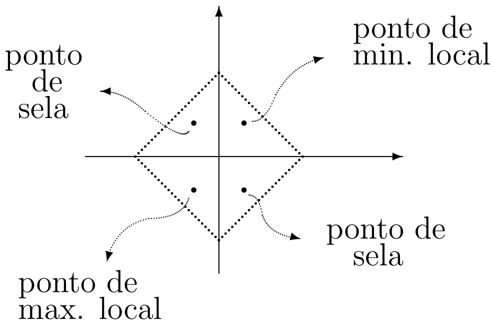
(ii) Análise para o ponto $(-1,-1)$:

$H(-1,-1) = 144 > 0 \quad$ e $\quad f_{xx}(-1,-1) = -12 < 0$

Logo $(-1,-1)$ é ponto de máximo local de f

(iii) Análise para os pontos $(1,-1)$ e $(-1,1)$:

$H(1,-1) = H(-1,1) = -144 < 0$. Logo $(1,-1)$ e $(-1,1)$ são pontos de sela de f.



4. Determinar os pontos críticos de $f(x, y) = 25x^2 + 4y^2 - 20xy$ e classificá-los.

   Resolução:

   Notemos que f é de classe C^2

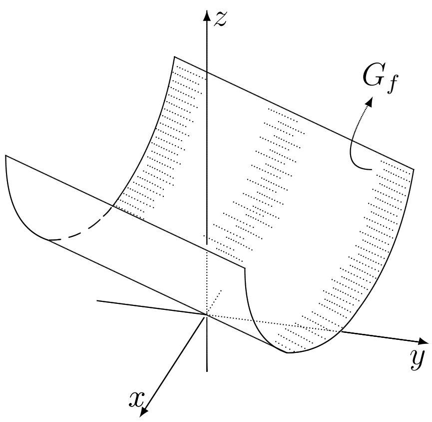
   $$f_x(x, y) = 50x - 20y = 0 \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{array} \right.$$
   $$f_y(x, y) = 8y - 20x = 0$$

   Logo, os pontos críticos são os pontos da reta $y = \dfrac{5}{2}\, x$

   $$f_{xx}(x, y) = 50$$
   $$f_{xy}(x, y) = -20 \qquad \qquad H(P) = \begin{vmatrix} 50 & -20 \\ -20 & 8 \end{vmatrix} = 0$$
   $$f_{yy}(x, y) = 8$$

   Nada podemos afirmar, em geral.

   Notemos, neste caso particular, que $f(x, y) = (2y - 5x)^2 \geq 0$. Como nos pontos críticos $2y - 5x = 0$, temos que $f(x, y) = 0$. Segue assim, que estes pontos são pontos de mínimo absoluto de $f(x, y)$.



— // — // —

Até aqui estudamos o aspecto local. Vamos agora passar a estudar o aspecto global. Antes de prosseguirmos vamos relembrar um resultado.

Teorema de Weiertrass: Seja $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, contínua, com K fechado e limitado. Então existem P_1 e P_2 em K tais que $f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$, para qualquer P em K (ou seja: f tem valor máximo e valor mínimo em K)

Observação.: Este é o Teorema 1.6.4, visto anteriormente. Lembremos, ainda, que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$, fechado e limitado é chamado de compacto.

Assim se estivermos interessados em descobrir os pontos de máximo e mínimo absolutos de $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f diferenciável e K compacto devemos procurá-los entre:

(i) Pontos fronteira de K.

(ii) Pontos interiores críticos de f.

Voltemos então aos exercícios

1. Consideremos uma chapa com a forma $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ e suponhamos que a temperatura em D seja dada por $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determinar o ponto mais quente e o mais frio de D.

   Resolução:

   Como T é diferenciável e o conjunto D é compacto, pelo Teorema de Weiertrass sabemos que existem P_1 e P_2 em D tais que

   $$T(P_1) \leq T(P) \leq T(P_2), \quad para \ \ todo \ \ P \ em \ D.$$

   Assim, P_1 e P_2 são os pontos de mínimo e máximo absolutos.

   Como sabemos, eles podem ocorrer somente em:

   (i) Pontos interiores críticos de T.

   (ii) Pontos da fronteira.

   Vamos procurá-los.

(i) No interior de $D : \{(x, y) \ / \ x^2 + y^2 < 1\}$

Pontos críticos:

$T_x(x, y) = 2x - 1 = 0$

$T_y(x, y) = 4y = 0$

Assim, o único ponto crítico é o ponto $\left(\frac{1}{2}\,,\,0\right)$ e $T\left(\frac{1}{2}\,,\,0\right) = -\frac{1}{4}$.

(ii) Na fronteira de D: $\{(x, y) \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$

Temos que $x^2 + y^2 = 1$ e assim $y^2 = 1 - x^2$

$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x = x^2 + 2(1 - x^2) - x = -x^2 - x + 2 = F(x)$,

onde $-1 \leq x \leq 1$.

Chegamos assim ao problema de determinar os pontos de máximo e mínimo absolutos de $F(x) = -x^2 - x + 2$ em $[-1, 1]$.

Determinemos os pontos críticos em $(-1, 1)$:

$F'(x) = -2x - 1 = 0 \iff x = -1/2$

$F(-1/2) = 9/4$. Ainda, nos pontos extremos, temos: $F(-1) = 2$ e $F(1) = 0$

Assim:

Ponto de máximo absoluto de F em $[-1, 1]$: $x = -1/2$ e $F(-1/2) = 9/4 = 2,25$.

Ponto de mínimo absoluto de F em $[-1, 1]$: $x = 1$ e $F(1) = 0$.

Voltando ao nosso problema inicial em estudo temos:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \implies y = \pm\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ x = 1 \implies y = 0 \end{cases}$$

$$T\left(-\frac{1}{2}\,,\,\pm\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9/4 = 2,25$$

$T(1, 0) = 0$

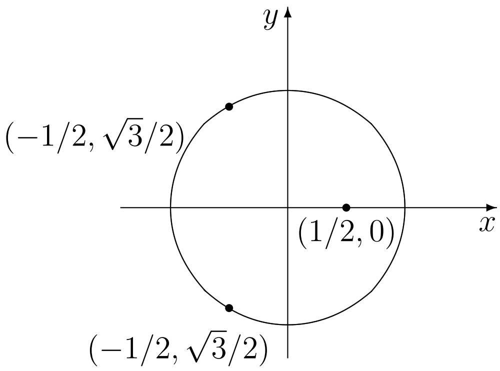
Podemos sintetizar as informações na tabela a seguir:

Pontos	Localização	Imagem do Ponto
$(1/2, 0)$	Interior de D	-1/4
$(1, 0)$	Fronteira de D	0
$(-1/2, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$	Fronteira de D	9/4

Conclusão:

O ponto mais frio da chapa D é o ponto $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ e sua temperatura é $-\dfrac{1}{4}$= - 0,25.

Os pontos mais quentes da chapa são $\left(-\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e a temperatura correspondente é $\dfrac{9}{4} = 2,25$.



2. Quais são o máximo e o mínimo de $\sqrt{x^2+y^2}$ no retângulo fechado $-1 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 3$?

   Resolução:

   Pelo Teorema de Weiertrass o máximo e o mínimo existem, uma vez que a função $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ é contínua e o conjunto é compacto.

   Podemos resolver este exercício diretamente, observando que a função $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ fornece a distância de (x, y) à origem e o ponto mais afastado da origem é o vértice $(2, 3)$. Portanto o máximo de $\sqrt{x^2+y^2}$ é seu valor $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ em $(2, 3)$. O mínimo é 0 e ocorre no ponto $(0, 0)$.

3. Caso existam, determinar o máximo e o mínimo de $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+4}$ e os pontos onde eles ocorrem.

   Resolução:

   Inicialmente, encontremos os pontos críticos de f:

   $$f_x(x, y) = \frac{x^2+y^2+4-2x.x}{(x^2+y^2+4)^2} = \frac{y^2-x^2+4}{(x^2+y^2+4)^2} = 0$$

   $$f_y(x, y) = \frac{-2yx}{(x^2+y^2+4)^2} = 0$$

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + 4 = 0 \\ \\ 2yx = 0 \implies x = 0 \; ou \; y = 0 \end{cases}$$

(i) $x = 0 \implies y^2 + 4 = 0$ - não tem solução.

(ii) $y = 0 \implies -x^2 + 4 = 0 \implies x = \pm\, 2$.

Logo os pontos críticos são: $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

f está sendo considerada no plano xy inteiro, o qual é um conjunto aberto. Assim um máximo ou um mínimo absoluto deve ser um máximo ou mínimo local e portanto ocorre em um dos pontos críticos. Notemos que $f(2, 0) = 1/4$ e $f(-2, 0) = -1/4$

Portanto, **se** f tem um máximo ele deve ser o valor $1/4$ em $(2, 0)$ e, **se** tem um mínimo, ele deve ser $-1/4$ em $(-2, 0)$.

Estamos impossibilitados de usar o Teorema de Weierstrass, uma vez que o plano xy não é limitado.

Vamos utilizar um raciocínio alternativo.

(*) $$|\, f(x,y)\, | \;=\; \frac{|\, x\, |}{x^2 + y^2 + 4} \;<\; \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}{x^2 + y^2 + 4} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$$

Logo $|\, f(x, y)\, |$ é pequeno quando $x^2 + y^2$ é grande.

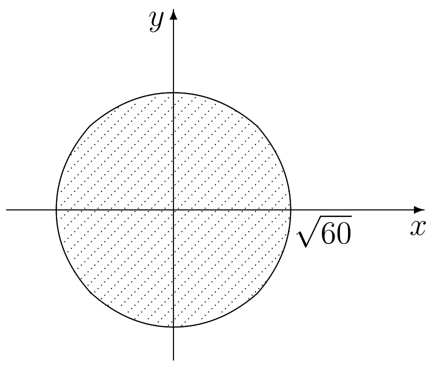
Em particular **(*)** mostra que $|\, f(x, y)\, | \;<\; \dfrac{1}{8}$, para $x^2 + y^2 \;\geq 60$.

Assim: $\dfrac{-1}{8} \;<\; f(x, y) \;<\; \dfrac{1}{8}$, para $x^2 + y^2 \geq 60$.

Voltemos agora a nossa atenção para o conjunto $\{(x, y) \;/\; x^2 + y^2 \leq 60\}$.

Apliquemos o Teorema de Weierstrass à função continua f no disco fechado e limitado $x^2 + y^2 \leq 60$.

Na fronteira temos que $x^2 + y^2 = 60$ e assim $\dfrac{-1}{8} \;<\; f(x, y) \;<\; \dfrac{1}{8}$.



Logo o máximo é $1/4$ e o mínimo é $-1/4$, alcançados nos pontos $(2,0)$ e $(-2,0)$, respectivamente.

Finalmente **(*)** também mostra que $1/4$ e $-1/4$ são o máximo e o mínimo para todo (x,y), uma vez que $f(x,y)$ também está entre estes valores para (x,y) fora do disco.

Observação: Notemos que $[\ \|(x,y)\| \longrightarrow \infty\ ] \Longrightarrow [\ (f(x,y)) \longrightarrow 0\ ]$

4. Caso exista, determinar o mínimo de $f(x,y) = x^2(1-y)^3 + y^2$ e o ponto onde ele ocorre.

Resolução:

Notemos que $f(x,y)$ é de classe C^2.

$f_x(x,y) = (1-y)^3.2x = 0$

$f_y(x,y) = -3x^2(1-y)^2 + 2y = 0.$

A única solução é $x = 0$ e $y = 0$. Assim o único ponto crítico é o ponto $(0,0)$.

Vamos determinar a natureza local do ponto $(0,0)$.

$f_{xx}(x,y) = 2(1-y)^3$

$f_{yy}(x,y) = 6(1-y).x^2 + 2$

$f_{xy}(x,y) = -3(1-y)^2.2x$

Assim: $f_{xx}(0,0) = 2$, $f_{yy}(0,0) = 2$ e $f_{xy}(0,0) = 0$

Logo $H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$

e portanto $(0,0)$ é ponto de mínimo local de f.

Observemos aqui que nada podemos afirmar sobre a situação global do ponto $(0,0)$. Nem mesmo podemos garantir que a função f tem mínimo global, uma vez que o Teorema de Weierstrass não pode ser aplicado.

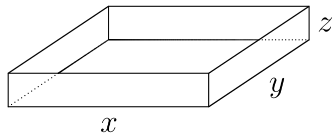
De fato, notemos que $f(0,0) = 0$ e $f(1,4) = (-3)^3 + 4^2 = -11 < 0$ e assim $(0,0)$ não é ponto de mínimo global de f. Mais ainda, $f(1,y) = (1-y)^3 + y^2$ é tal que $[f(1,y) \longrightarrow -\infty]$ quando $[y \longrightarrow \infty]$, e assim não existe ponto de mínimo global.

Observação: Este exercício mostrou que podemos ter $f : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com só um ponto crítico, mínimo local, que não é mínimo absoluto de f.

5. Uma caixa retangular, sem tampa, deve ter $32\,\mathrm{cm}^3$. Quais devem ser suas dimensões para que a superfície total seja mínima?

Resolução:

Volume $= \ xyz = 32 \ \Rightarrow \ z = \dfrac{32}{xy}$



Superfície $= \ S = 2xz + 2yz + xy; \ x > 0, \ y > 0$

Substituindo z obtemos:

$S(x, y) = \dfrac{64}{y} + \dfrac{64}{x} + xy; \ x > 0, \ y > 0$

Como a região é aberta o mínimo deve ocorrer num ponto crítico de S. Passemos então a determiná-los:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = y - \frac{64}{x^2} = 0 \iff x^2y = 64$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = x - \frac{64}{y^2} = 0 \iff y^2x = 64$$

Dividindo membro a membro

$$\frac{x^2y}{y^2x} = 1 \implies x = y$$

Portanto, $x^3 = 64 \implies x = 4 = y$

Assim, o único ponto crítico é $(4, 4)$. Usando a equação $z = \dfrac{32}{xy}$ encontramos $z = 2$

Aqui temos duas opções:

(i) Partimos do princípio que o problema tem solução.

(ii) Não partimos do princípio que o problema tem solução.

Na opção (i), como esperamos que o problema tenha solução e encontramos somente um ponto crítico (um candidato), podemos admitir que ele fornece a solução.

Na opção (ii), uma demonstração formal de que $S(x, y)$ tem de fato um mínimo absoluto em $(4, 4)$ pode ser feita com o argumento a seguir: Conforme (x, y) aproxima-se do infinito ou do bordo do quadrante (semi eixos) $f(x, y)$ cresce, assim o mínimo de S é obtido no ponto crítico. Alternativamente, poderíamos fazer uso do tipo de argumento usado anteriormente no exercício 3.

O que tem que ficar claro é que argumento que $(4,4)$ é ponto de mínimo local não serve para concluir que é mínimo global (absoluto), como bem mostra o exercício 4 anterior.

6. Uma indústria pode produzir dois produtos, A e B, usando três tipos de material, I, II e III. O modo como a indústria opera é descrito pela tabela abaixo.

		PRODUTOS	
		A	B
MATERIAIS	I	1	4
	II	1	3
	III	0	1

Sabe-se ainda que para cada unidade produzida de A o lucro é 5 e para cada unidade produzida de B o lucro é 20. No estoque existem 80 unidades do material I, 60 unidades do material II e 15 unidades do material III. O material não usado não tem valor algum e o custo da produção é proporcional à quantidade produzida. Determinar o esquema de produção que torne o lucro máximo, nestas condições.

Resolução:

x - quantidade de A produzida.

y - quantidade de B produzida.

Lucro: $L(x,y) = 5x + 20y$

Problema: máximo de $L(x,y)$ respeitadas as condições de estoque.

Estas condições são:

$$x \cdot 1 + y \cdot 4 \ \leq \ 80,$$

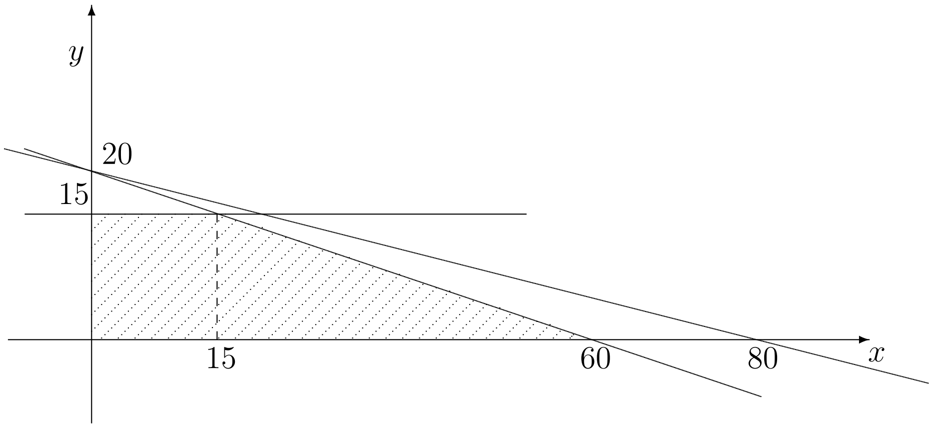
onde estamos levando em consideração o material I utilizado por unidade de A, de B e o seu estoque. Analogamente:

$$x \cdot 1 + y \cdot 3 \ \leq \ 60$$

$$x \cdot 0 + y \cdot 1 \ \leq \ 15$$

Isto significa que $L(x, y)$ está definida no conjunto D, determinado por:

$$D \; : \; \begin{cases} x + 4y & \leq & 80 \\ x + 3y & \leq & 60 \\ y & \leq & 15 \\ x \geq 0 & , & y \geq 0 \end{cases}$$



Como L é contínua e D é compacto, L atinge seus extremos em D. Ainda, como $L_x(x, y) = 5$ e $L_y(x, y) = 20$, não temos pontos críticos. Assim os extremos ocorrem necessariamente na fronteira de D. Vamos determiná-los. A fronteira de D é constituída de 4 segmentos. Passemos a analisar cada um deles.

(i) $x = 0 \implies L(0, y) = 20y\,, \quad 0 \leq y \leq 15$

Máximo para $y = 15$ e $L(0, 15) = 300$

(ii) $y = 0 \implies L(x, 0) = 5x\,, \quad 0 \leq x \leq 60$

Máximo para $x = 60$ e $L(60, 0) = 300$

(iii) $y = 15 \implies L(x, 15) = 300 + 5x\,, \quad 0 \leq x \leq 15$

Máximo para $x = 15$ e $L(15, 15) = 375$

(iv) $x = 60 - 3y \implies L(60 - 3y\,,\, y) = 300 + 5y\,, \quad 0 \leq y \leq 15$

Máximo para $y = 15$ e $L(15, 15) = 375\,.$

Conclusão: O máximo se dá no ponto $(15, 15)$.

Assim o melhor esquema de produção seria: 15 unidades de A e 15 unidades de B e o lucro seria de 375

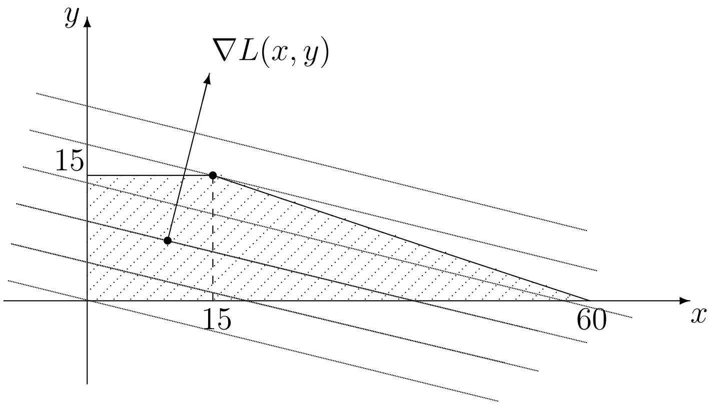
Um segundo modo de resolver o problema seria:

Curvas de nível de L: $5x + 20y = k$

$\nabla L(x, y) = (5, 20)$

Observamos que o valor de $L(x, y)$ aumenta quando "deslocamos" as curvas de nível no sentido ∇L.

Portanto, o máximo será alcançado em $(15, 15)$.

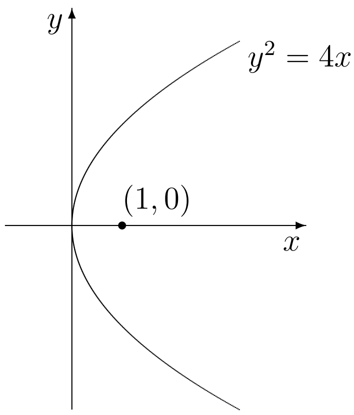


7. Calcular a menor distância do ponto $(1, 0)$ a um ponto da parábola $y^2 = 4x$.

Resolução:

A distância de um ponto (x, y) ao ponto $(1, 0)$ é dada por

$$d(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\ .$$



$d(x, y)$ tem um valor mínimo onde $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$ tem um valor mínimo.

Vamos então calcular o ponto de mínimo de $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$, sujeito à condição de $y^2 = 4x$.

Logo:

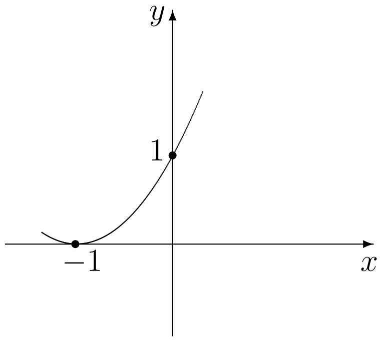
$$T(x) = (x-1)^2 + 4x\ , \quad x \geq 0$$

$$T'(x) = 2(x-1) + 4 = 2x + 2 = 0 \iff x = -1$$

Observemos o gráfico de T.

No conjunto $x \geq 0$, o mínimo ocorre

na fronteira ($x = 0$).



Resposta:

A menor distância é 1 e ela ocorre no ponto $(0, 0)$.

1.10 Máximos e Mínimos Condicionados

Um exemplo inicial:

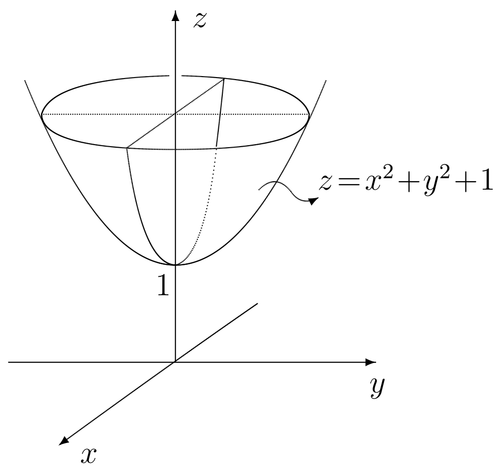
(a) Consideremos $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

e o problema de encontrar o mínimo de f.

Notemos que $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \geq 1$ e

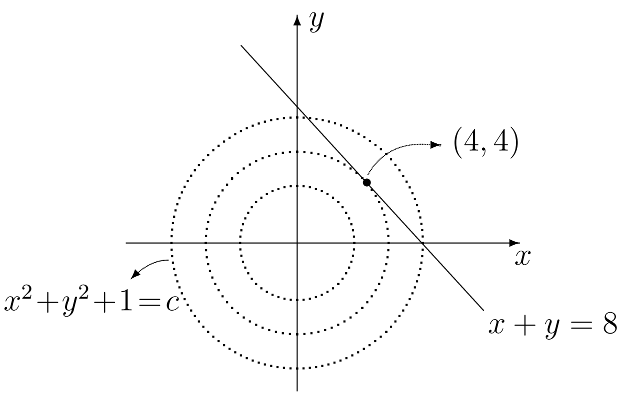
$f(0, 0) = 1$ e assim o ponto de mínimo absoluto

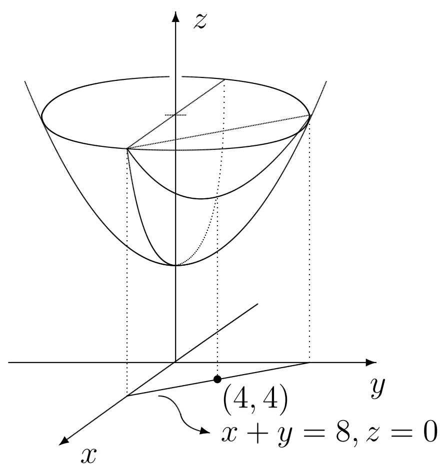
de f é $(0, 0)$ e o valor mínimo é 1.



(b) Consideremos agora $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ e o problema de encontrar o mínimo de f condicionado ao conjunto $\{(x, y) \ / \ x + y = 8\}$

Nas duas ilustrações a seguir fica claro qual é o ponto procurado.



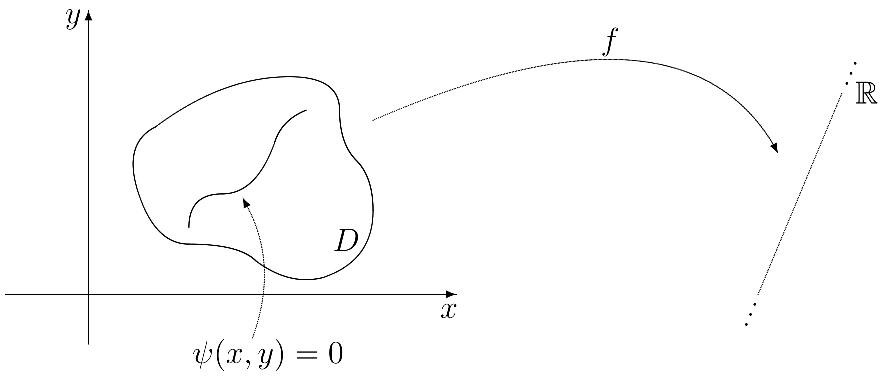


Observação 1: Poderíamos ter resolvido analiticamente, fazendo a substituição $y = 8 - x$ em $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

Observação 2: Nem sempre dá para fazer isso.

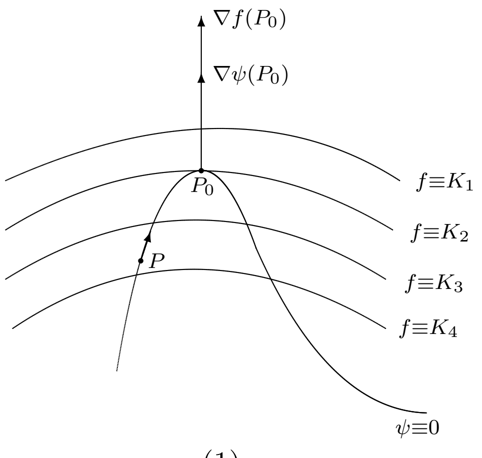
Passemos então ao problema geral.

Problema: Consideremos a função $z = f(x, y)$ definida em $D \subset \mathbb{R}^2$. Queremos achar os pontos de máximo e mínimo de f não em D, mas entre os pontos de D que satisfazem à condição $\psi(x, y) = 0$

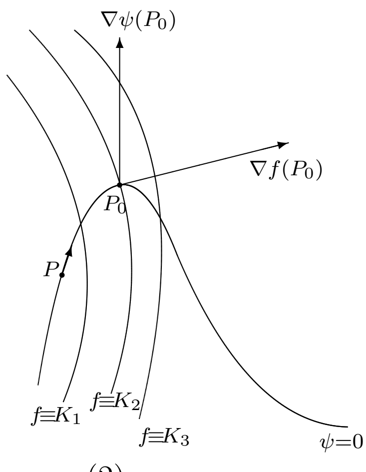


Suponhamos $f \in C^1$, $P_0 \in D$, $\psi(P_0) = 0$ e que $f(P) \le f(P_0)$ para todo P na curva de nível $\psi(P) = 0$.

Analisemos a situação das curvas de nível $\psi(x, y) = 0$ e $f(x, y) = K$, $K \in R$.



(1)



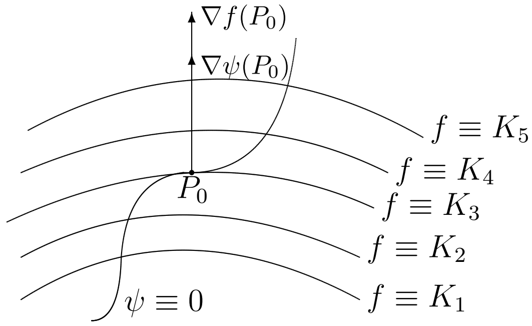
(2)

Se P percorre a curva de nível $\psi(x, y) = 0$ no sentido indicado na Figura (1), então $f(P)$ cresce até o ponto P atingir P_0 e depois $f(P)$ começa a decrescer.

Já a situação da Figura (2) não é possível, pois depois de P passar por P_0 existem pontos tais que $f(P) \ge f(P_0)$.

Na figura (1) temos que $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla \psi(P_0)$.

Notemos ainda na Figura (3) a seguir uma situação em que $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla \psi(P_0)$ e no entanto P_0 não é ponto de máximo ou de mínimo de f condicionado à curva $\psi(x, y) = 0$.



(3)

Formalizemos a discussão anterior:

Teorema 1.10.1. *Suponhamos que f e ψ sejam de classe C^1 em uma vizinhança de P_0, que $\psi(P_0) = 0$ e que $f(P) \leq f(P_0)$ para todo ponto P na curva de nível $\psi(P) = 0$. Se $\nabla \psi(P_0) \neq \vec{0}$ então $\nabla f(P_0)$ é um múltiplo de $\nabla \psi(P_0)$, isto é:*

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla \psi(P_0)$$

(o número λ é chamado Multiplicador de Lagrange *)*

Prova:

Pode-se mostrar que, sob as condições dadas , podemos representar a curva $\psi(P) = 0$ próxima de $P_0 = (x_0, y_0)$ na forma paramétrica $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ para t em um intervalo I, $\gamma^{'}(t) \neq (0, 0)$, γ de classe C^1 e $\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) = P_0$. [a existência de uma tal parametrização é garantida pelo Teorema das Funções Implícitas (veremos adiante)]

Por hipótese, a função composta $F(t) = f(x(t), y(t))$ tem um máximo em $t = t_0$. Assim:

$$0 = F\,'(t_0) = f_x(x_0, y_0).\ x'(t_0) + f_y(x_0, y_0).\ y'(t_0) \ = < \nabla f(x_0, y_0)\,,\, \gamma\,'(t_0) >$$

. Por outro lado, do fato de $\psi(\gamma(t)) = 0$, $t \in I$, resulta que $< \nabla\ \psi(\gamma(t_0)\,,\, \gamma\,'(t_0) >= 0$.

As equações anteriores implicam que os vetores $\nabla f(P_0)$ e $\nabla \psi(P_0)$ são perpendiculares ao vetor não nulo $\gamma\,'(t_0)$. Assim, tais vetores são paralelos, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla \psi(P_0)$$

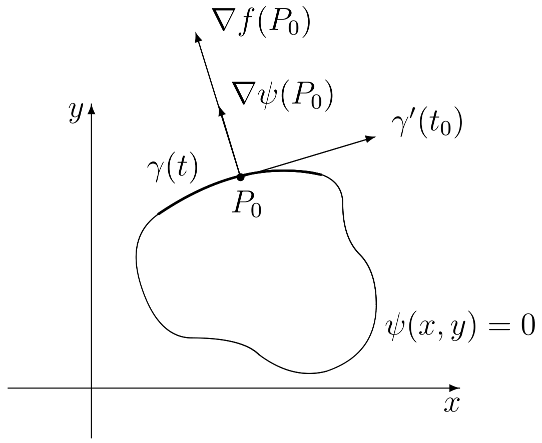


Ilustração da conclusão do Teorema

Exercícios resolvidos:

1. Determinar os valores extremos da função $f(x,y) = xy$ no círculo de raio unitário e centro na origem.

   Resolução:

   $D = \{(x,y) \;/\; x^2 + y^2 \leq 1\}$

   $f_x(x,y) = y \qquad \text{e} \qquad f_x(x,y) = x$

   Portanto, o único ponto estacionário no interior de D é o ponto $(0,0)$, que já sabemos ser ponto de sela.

   Ainda: f é contínua em D (que é compacto) e assim, assume seus extremos (não no interior e portanto na fronteira).

   Consideremos

   $f(x,y) = xy$

   $\psi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

   Temos:

   $\nabla\psi(x,y) = (2x, 2y)$

   $\nabla f(x,y) = (y, x)$

   Observemos que $\nabla\psi(x,y) \neq \vec{0}, \;\; \forall\; (x,y)$ satisfazendo $x^2 + y^2 = 1$.

   Se $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla\psi(x,y)$, então

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 2\lambda x - y = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por -2λ, e somando membro a membro obtemos:

$$-y + 4\lambda^2 y = 0$$

$$y(4\lambda^2 - 1) = 0$$

mas $y \neq 0$ (pois caso contrário teríamos $x = 0$). Temos então:

$$4\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm\,\frac{1}{2}$$

(i) $\lambda = \dfrac{1}{2} \implies x = y$

Substituindo em $x^2 + y^2 - 1 = 0$, temos

$$x = y = \pm\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

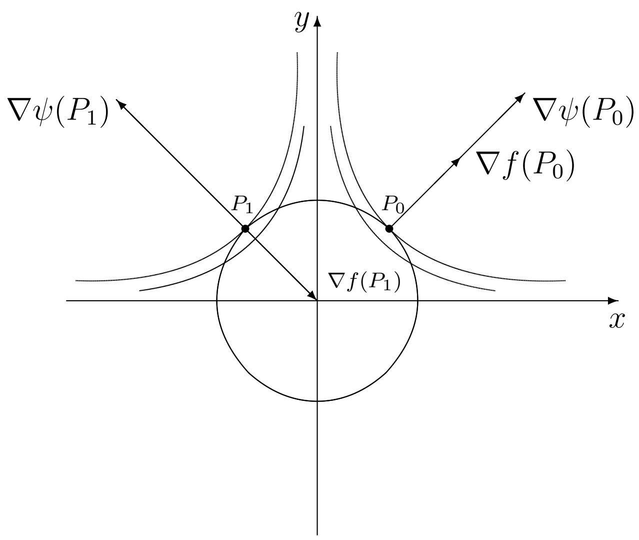
(ii) $\lambda = -\,\dfrac{1}{2} \implies x = -y = \pm\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Assim:

$$\left.\begin{array}{r} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \xrightarrow{f} \dfrac{1}{2} \\[2ex] \left(-\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\,-\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \xrightarrow{f} \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \therefore \text{ são pontos de máximo}$$

$$\left.\begin{array}{r} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\,-\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \xrightarrow{f} -\,\dfrac{1}{2} \\[2ex] \left(-\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \xrightarrow{f} -\,\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \therefore \text{ são pontos de mínimo}$$

Vejamos a configuração de algumas das curvas de nível.



2. Encontre a menor distância da origem a um ponto da elipse $\psi(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 = 20$.

   Resolução:

   Queremos minimizar $f(x,y) = x^2 + y^2$ (Podemos pensar assim, pois a distância é positiva e portanto basta minimizar seu quadrado).

   Observemos que f é contínua e a elipse é um conjunto compacto. Assim, f atinge seus extremos.

   Temos:

   $\nabla\psi(P) = (16x - 12y\,,\, 34y - 12x) \neq (0,0)$ nos pontos da elipse

   $\nabla f(P) = (2x\,,\, 2y)$.

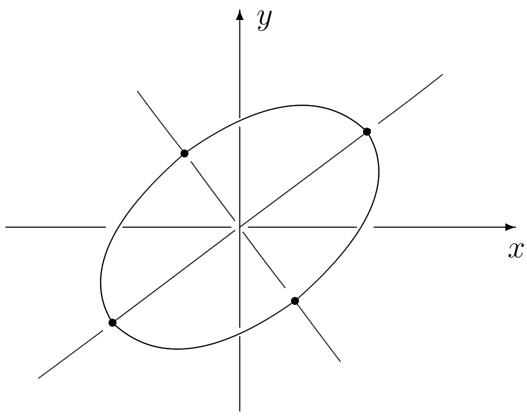
   Se $\nabla f(P) = \lambda \nabla \psi(P) \implies \begin{cases} x = \lambda(8x - 6y) \quad (*) \\ y = \lambda(17y - 6x) \end{cases}$

   Podemos supor $8x - 6y \neq 0$, uma vez que se $8x - 6y = 0 \stackrel{(*)}{\implies} x = 0 \Rightarrow y = 0$, ponto que não está sobre a elipse.

   Assim, $\lambda = \dfrac{x}{8x - 6y} \Rightarrow y = \dfrac{x}{8x-6y}(17y - 6x) \Rightarrow 6x^2 - 9xy - 6y^2 = 0$, a qual juntamente com $8x^2 - 12xy + 17y^2 = 20$ fornecerá $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

   Calculando x obteremos os pontos

$$\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{-4}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\ \text{e}\ \left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$



$$f\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = f\left(\frac{-4}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = 4$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = 1$$

Assim, os pontos da elípse mais próximos da origem são: $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

Os pontos da elipse mais distantes da origem são : $\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(\frac{-4}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

3. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ e consideremos Q a forma quadrática associada, isto é:

$$Q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Calcular o máximo e o mínimo de Q, sujeito à condição $\psi(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

Resolução:

Observemos que Q é contínua e $x^2 + y^2 = 1$ é um conjunto compacto. Assim Q atinge seus extremos.

Temos:

$\nabla\psi(x,y) = (2x, 2y)$ e $\nabla Q(x,y) = (2ax + 2by\,,\, 2bx + 2cy)$

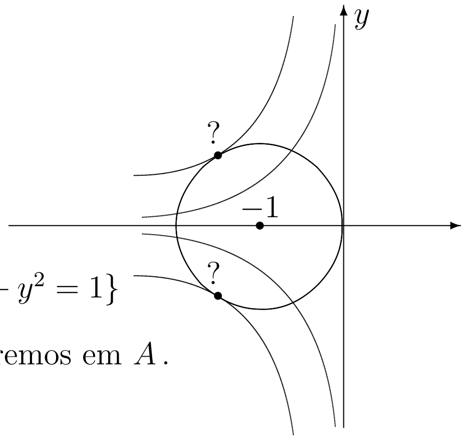
$$\nabla Q(x,y) = \lambda \nabla\psi(x,y) \iff \begin{cases} ax + by = \lambda x \\ bx + cy = \lambda y \end{cases} \iff A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim: (x,y)-autovetor de A associado ao autovalor λ.

$$Q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda\,.$$

Assim: o máximo de Q sujeito a $x^2 + y^2 = 1$ é igual ao maior autovalor de A e ele é obtido quando (x, y) é um autovetor associado. Analogamente para o mínimo.

4. Encontre o máximo de $f(x, y) = xy$ sobre a curva $\psi(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 = 1$. Observe que de fato existe um máximo.



Resolução:

Observemos que o conjunto $A = \{(x, y) \ / \ (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$ é compacto e f é contínua. Logo, f atinge seus extremos em A.

$\nabla\psi(x, y) = (\ 2(x + 1)\ ,\ 2y)$.

Assim $\nabla\psi = \vec{0}$ somente em $(-1, 0)$.

$\therefore\ \ \nabla\psi \neq \vec{0}$ em todo ponto da curva de nível $\psi(x, y) = 1$.

$\nabla f(x, y) = (y, x)$.

No ponto de máximo devemos ter $\quad \nabla f(x, y) = \lambda\nabla\psi(x, y)$,

ou seja,

$$\begin{cases} y = \lambda 2(x + 1) \\ x = \lambda 2y \\ (x + 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Se $y = 0 \Rightarrow x = 0$.

Se $y \neq 0$, temos $\lambda = \dfrac{x}{2y}$, e assim, $y = \dfrac{x}{2y}2(x + 1)$ ou $y^2 = x^2 + x$.

$$\therefore\ \ (x + 1)^2 + x^2 + x = 1$$

$$2x^2 + 3x = 0$$

$$x = 0 \ \text{ ou } \ x = -\frac{3}{2}.$$

Para $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow xy = 0$

Para $x = -\dfrac{3}{2}$ e $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow xy = \dfrac{-3\sqrt{3}}{4}$

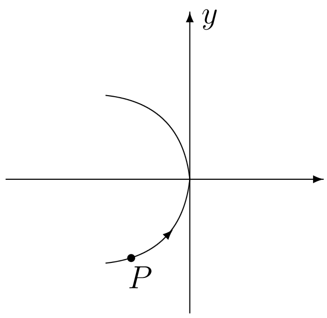
Para $x = -\dfrac{3}{2}$ e $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow xy = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\therefore \quad \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ - \text{ é ponto de mínimo}$$

$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ - \text{ é ponto de máximo}$$

— ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ —

Observação 1: No exemplo anterior temos que $\nabla f(0,0) = \lambda \nabla \psi(0,0)$ e no entanto o ponto $(0,0)$ não é ponto de máximo (ou de mínimo) de f restrita à curva $\psi(x,y) = 1$.
[Observe o que acontece quando P percorre a curva ao lado no sentido indicado].



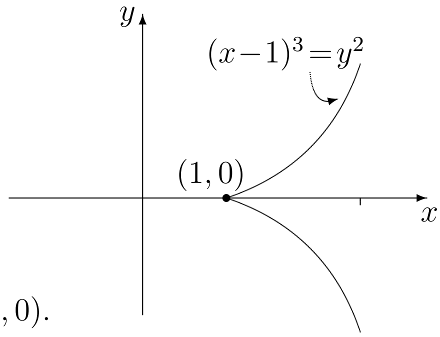
Observação 2: O fato de $\nabla\psi(P_0) \neq \vec{0}$ é importante. Se tal fato não acontecer, a regra não é válida.

Exemplo:

Calcular o mínimo de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeito à condição $\psi(x,y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$.

Notemos que o problema é equivalente a encontrar a menor distância da curva $\psi \equiv 0$ à origem.

Geometricamente, é claro que a menor distância da origem à curva $\psi \equiv 0$ é alcançada no ponto $P_0 = (1,0)$.



$\nabla\psi(x,y) = (\ 3(x-1)^2\,,\ -2y)$

$\nabla f(x,y) = (2x\,,\ 2y)$

$$\begin{cases} 2x = \lambda 3(x-1)^2 \\ 2y = \lambda \cdot -2y \\ (x+1)^3 - y^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{não está satisfeito por } (1,0).$$

Observemos que $\nabla\psi(1,0) = (0,0)$

——— / / ——— / / ———

O que acabamos de estudar nesta seção se generaliza para mais variáveis e para mais restrições e é do que trataremos a seguir.

Generalizações

(I) Com mais variáveis

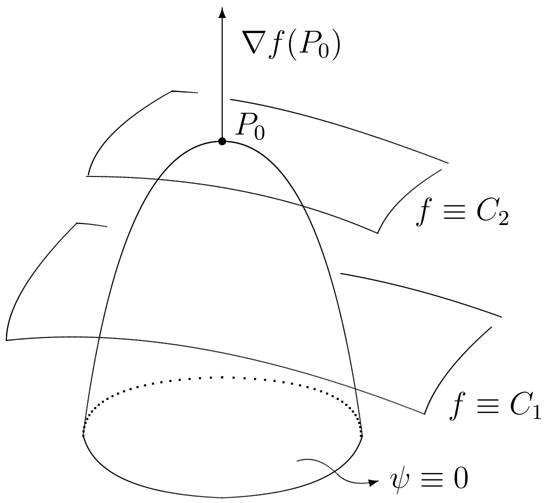
Por exemplo: Maximizar $f(x,y,z)$

sujeita à restrição $\psi(x,y,z) = 0$.

Notemos que $\nabla f(P_0)$ deve ser

normal à superfície $\psi \equiv 0$.

Assim: $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla\psi(P_0)$



Exercícios propostos:

(1) Encontrar o ponto do plano $2x + y - z = 5$ que está mais próximo da origem. Resposta: $(\frac{5}{3}\ ,\ \frac{5}{6}\ ,\ \frac{-5}{6})$

(2) Minimizar $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ restrita ao plano $2x + 3y + 4z = 12$.
Resposta: $\frac{1}{11}(5\ ,\ 30\ ,\ 8)$

(II) Com mais restrições

Por exemplo: Maximizar $f(x,y,z)$ sujeita a duas restrições:

$\psi(x,y,z) = 0$ e $\phi(x,y,z) = 0$.

Notemos que $\psi(x,y,z) \equiv 0$ - em geral, define uma superfície.

Analogamente, $\phi(x,y,z) \equiv 0$ - em geral, define uma superfície.

Seja P_0 - ponto em que $f(x,y,z)$ assume valor máximo sobre a curva $\psi \equiv \phi \equiv 0$

Temos que $\nabla f(P_0) \perp$ à curva em P_0 [por raciocínio análogo ao desenvolvido na prova do Teo. 1.9.1]

Ainda:

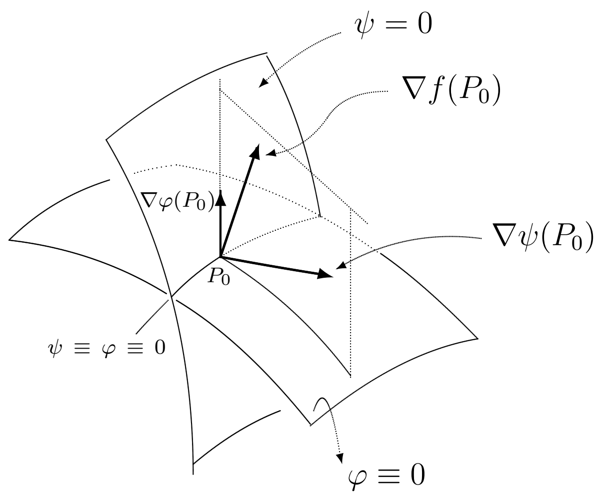
$\nabla\psi(P_0)$ - normal à curva em P_0 [pois a curva está contida na superfície $\psi \equiv 0$ e $\nabla\psi(P_0) \perp$ (superfície $\psi \equiv 0$)].

Analogamente, $\nabla\phi(P_0)$ - normal à curva em P_0.

Assim se $\nabla\psi(P_0)$ e $\nabla\phi(P_0)$ não são nem paralelos e nem nulos (ou seja L.I.) eles determinam o plano normal à curva em P_0. Como $\nabla f(P_0)$ está neste plano, temos que

$$\nabla f(P_0) = \lambda.\nabla\psi(P_0) + \mu.\nabla\phi(P_0)$$

para números reais λ e μ.



Exemplo:

Determine os pontos de C mais próximos e mais afastados da origem, onde C é o arco, no primeiro octante, da curva em que o parabolóide $2z = 16 - x^2 - y^2$ intercepta o plano $x + y = 4$

Resolução:

Seja $P(x, y, z)$ - ponto genérico de C.

Queremos encontrar o maior e o menor valor de $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Se a distância é mínima ou máxima seu quadrado é mínimo ou máximo, e assim vamos extremar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeita às condições:

$$\begin{cases} \psi(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0 \\ \phi(x,y,z) = x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

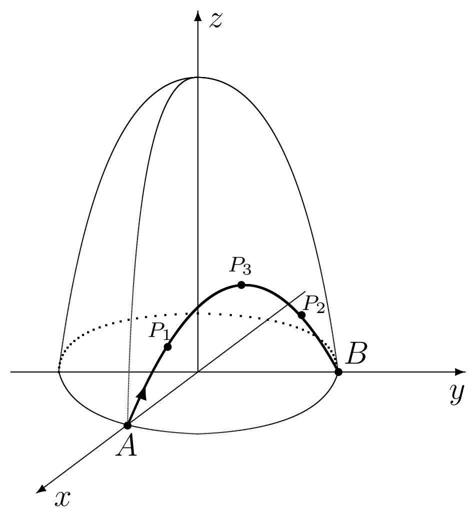
Assim:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda.\nabla\psi(x,y,z) + \mu.\nabla\phi(x,y,z)$$

se expressa como:

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda.(2x, 2y, 2) + \mu.(1,1,0)$$

ou seja



$$\begin{cases} 2x = \lambda.2x + \mu \\ 2y = \lambda.2y + \mu \\ 2z = 2\lambda \end{cases}$$

$2(x-y) = 2\lambda(x-y)$

$2(x-y)(1-\lambda) = 0$

Assim $x = y$ ou $\lambda = 1$

(i) Se $\lambda = 1 \Longrightarrow z = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 14 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$

Assim:

$x^2 + (4-x)^2 - 14 = 0$

$x^2 + 16 - 8x + x^2 - 14 = 0$

$2x^2 - 8x + 2 = 0$

$x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad (\Delta = 12)$

$x = 2 \pm \sqrt{3}$

Assim os pontos de C que podem ser extremos são: $P_1 = (2+\sqrt{3}\ ,\ 2-\sqrt{3}\ ,\ 1)$ e $P_2 = (2-\sqrt{3}\ ,\ 2+\sqrt{3}\ ,\ 1)$

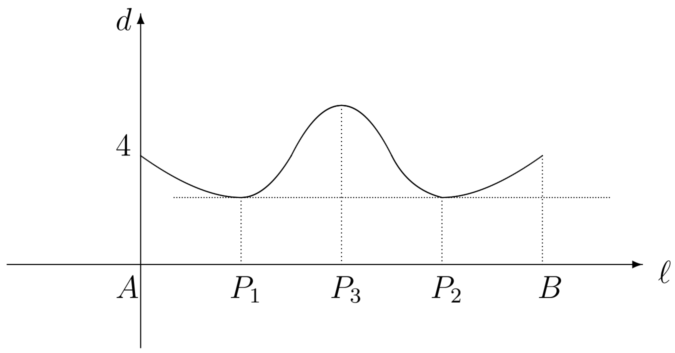
As distâncias correspondentes são: $d(O,P_1) = \sqrt{15}$ e $d(O,P_2) = \sqrt{15}$

(ii) Se $y = x \Longrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2z - 16 = 0 \\ 2x - 4 = 0 \end{cases}$

Assim $x = 2$ e $z = 4$

Neste caso obtemos o ponto $P_3 = (2\ ,\ 2\ ,\ 4)$ e $d(O, P_3) = 2\sqrt{6}$

Notemos: Quando um ponto move-se ao longo de C de $A = (4, 0, 0)$ até $B = (0, 4, 0)$ sua distância a origem começa em $d(O, A) = 4$, decresce até o mínimo de $\sqrt{15}$ em P_1 e cresce até o máximo de $2\sqrt{6}$ em P_3. Depois decresce até $\sqrt{15}$ em P_2 e cresce novamente até 4 em B.



Obs.: Outra maneira de resolver este exercício seria notar que as equações paramétricas de C são $x = 4 - t$, $y = t$ e $z = 4t - t^2$; $0 \leq t \leq 4$ e $f(x, y, z) = (4 - t)^2 + t^2 + (4t - t^2)^2$ e usar métodos de uma variável.

Exercícios propostos:

(1) Calcular o máximo e o mínimo de $f(x, y) = x + y$ sujeito à condição $x^2 + y^2 = 1$. Observe que de fato eles existem. Desenhe os vetores gradientes de $f(x, y)$ e de $\psi(x, y) = x^2 + y^2$.

(2) Calcular os pontos extremos da função

$z = f(x, y) = (x - y)^6 + (y - 2)^4$

Nota: Observe que $H = 0$.

(3) Calcular os extremos de $z = f(x, y) = (xy) + \dfrac{27}{x} + \dfrac{27}{y}$.

(4) Estude as funções abaixo quanto à pontos extremos:

(a) $f(x, y) = (y - x^2)^2 + x^5$

(b) $f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4$

(5) O que podemos afirmar no caso de $f \in C^2$ e P_0 ser um ponto estacionário de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_{xx}(P_0).f_{yy}(P_0) < 0$?

(6) Se $f(x, y)$ tem um mínimo local em (a, b), então $f_{xx}(a, b) \geq 0$ e $f_{yy}(a, b) \geq 0$.

Sugestão: Analise o comportamento de f nas retas $x = a$ e $y = b$.

(7) Se $f(x, y)$ satisfaz $5f_{xx}(x, y) + 4f_{yy}(x, y) = -1$ em todo ponto (x, y) então f não pode ter um mínimo local em nenhum ponto.

(8) Este exercício irá mostrar que a natureza de um ponto estacionário não pode ser determinada aproximando-se apenas por linhas retas.

Seja $f(x, y) = (y - 4x^2)(y - x^2)$.

(a) Desenhe as regiões onde $f(x, y) = 0$, $f(x, y) > 0$ e $f(x, y) < 0$.

(b) Mostre que a origem é um ponto estacionário de f .

(c) Mostre que sobre qualquer reta através da origem, a função tem um mínimo local na origem.

(d) Use um outro caminho para mostrar que a origem é um ponto de sela.

(9) Considere a função $f(x, y) = |y| + \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$.

(a) Em quais pontos não existem (uma das duas ou as duas) derivadas parciais.

(b) Ache todos os pontos onde as duas derivadas parciais são nulas.

(c) Qual é o mínimo absoluto de f e em qual ponto ocorre?

(10) Dividir 120 em três partes de modo que a soma dos produtos das partes tomadas duas a duas seja máxima.

(11) Achar o ponto do plano $2x - y - 2z = 16$ mais próximo da origem.

Sugestão: Procure tirar y como função de x e z .

(12) Uma chapa retangular D é determinada pelas retas $x = 3$, $y = 5$, $x = 0$ e $y = 0$. A temperatura da chapa é $T(x, y) = xy^2 - x^2y + 100$. Determinar o ponto mais quente e o ponto mais frio da chapa.

(13) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, com $f'(u) > 0$, $\forall\, u \in \mathbb{R}$.

Consideremos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = f(x^2y)$.

(a) Desenhe algumas curvas de nível de g.

(b) Achar os pontos estacionários de g.

(c) Dentre os pontos estacionários quais são os pontos de máximo, mínimo e de sela?

(14) Qual é o ponto (x, y) do plano que tem a propriedade de ter como mínima a soma de sua distância ao eixo x com duas vezes a sua distância ao ponto $(0, 1)$?

(15) Mostrar que de todos os triângulos com a mesma área A, o de menor perímetro é o triângulo equilátero.

Sugestão: $A^2 = p(p - x)(p - y)(p - z)$ onde $2p$ é o perímetro e x, y, z são os lados do triângulo.

(16) Achar os máximos e mínimos locais de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

(17) Mostrar que um paralelepípedo de volume máximo V com área S constante é um cubo.

Observação: Note que podemos tirar z da equação da superfície S como função de x e y usando o Teorema das Funções Implícitas.

(18) Calcular o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está mais próximo do ponto $A = (3, 3, 3)$.

Observação: Observe que de fato existe um ponto de mínimo.

(19) Os leitos de dois rios são aproximadamente representados pela parábola $y = x^2$ e a reta $x - y - 2 = 0$. Deseja-se reunir os dois cursos por um canal retilíneo de tal maneira que o comprimento seja mínimo. Quais são os pontos pelos quais deve passar o canal?

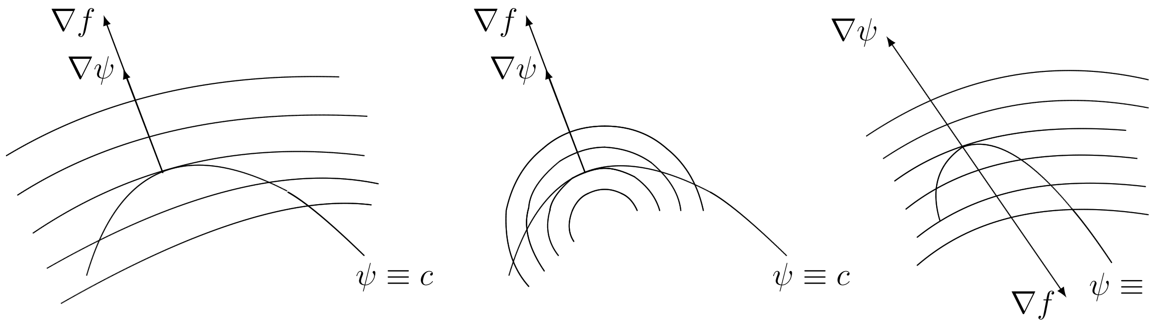
Observação: Distância de um ponto (x_0, y_0) à reta $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$\left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

(20) Achar a maior e a menor distância de um ponto situado sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ à reta $x + y - 4 = 0$.

(21) Determinar qual é o tipo dos pontos estacionários da função $f(x, y) = e^x (x - 1)^2 + (y - 2)^4$.

(22) A figura abaixo mostra pontos onde a condição de Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla \psi$ está satisfeita. Quais são pontos de máximo de f sobre $\psi \equiv c$, quais são pontos de mínimo, e quais não são nem de máximo e nem de mínimo? (as linhas são curvas de nível de f, $f \in C^1$).



$(*)$ $(**)$ $(***)$

(23) Calcule os pontos extremos de $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4$.

(24) Calcule o volume máximo de uma caixa retangular cuja soma dos comprimentos de suas arestas é $12a$.

(25) Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

(26) Maximize a função $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeita às restrições $2x - y = 0$ e $y + z = 0$.

(27) Encontre os valores extremos da função $f(x, y, z) = xy + z^2$ sobre a circunferência resultante da intersecção do plano $y - x = 0$ com a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.