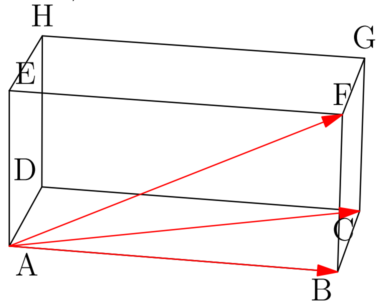
Lista 1 - Geometria Analítica

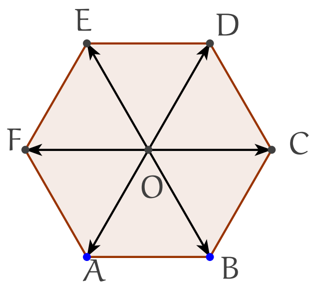
Vetores

1 — Sendo ABCDEFGH o paralelogramo abaixo, expresse os seguintes vetores em função de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AF}$:



a) $\overrightarrow{BF}$
b) $\overrightarrow{AG}$
c) $\overrightarrow{AE}$
d) $\overrightarrow{BG}$
e) $\overrightarrow{AG}$
f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$
g) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG}$
h) $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GH}$

2 — Sendo ABCDEF um hexágono regular, como na figura abaixo. Expresse os seguintes vetores em função dos vetores $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}$

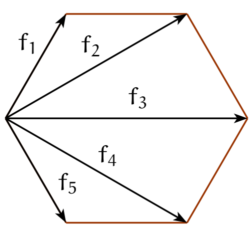


a) $\overrightarrow{DF}$
b) $\overrightarrow{DA}$
c) $\overrightarrow{DB}$
d) $\overrightarrow{DO}$
e) $\overrightarrow{EC}$
f) $\overrightarrow{EB}$
g) $\overrightarrow{OB}$

3 — Sendo ABCDEF um hexágono regular, como no exercício anterior. Expresse os seguintes vetores em função dos vetores $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$
d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$
e) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EF}$

4 — Dados os vetores $\mathbf{f}_1, \ldots \mathbf{f}_5$ os vetores que ligam um vértice de um hexágono regular aos outros vértices como mostra a figura abaixo. Determine a soma desses vetores em função dos vetores $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_3$.



5 — Dado um triângulo ΔABC, sejam

M, N, P os pontos médios dos segmentos AB, BC e CA respectivamente. Exprima os vetores $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

6 — Dado um triângulo ΔABC, seja M um ponto do segmento AB. Suponha que o vetor $\overrightarrow{AM}$ é igual a λ vezes o vetor $\overrightarrow{MB}$. Exprima o vetor $\overrightarrow{CM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$.

7 — Dado um quadrilátero $ABCD$, tal que $\overrightarrow{AD} = 5\mathbf{u}$, $\overrightarrow{BC} = 3\mathbf{u}$ e tal que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

a) determine o lado $\overrightarrow{CD}$ e as diagonais $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CA}$ em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

b) prove que $ABCD$ é um trapézio.

8 — Dado $\mathbf{v}$ um vetor não nulo. Prove que $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido que $\mathbf{v}$

9 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares resolva a equação nas incógnitas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, i.e., escreva os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

a)

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \mathbf{u} \\ 3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 2\mathbf{y} = \mathbf{u} \\ 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} \end{cases}$$

10 — Dados os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ tais que $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{z}$. Prove que $\mathbf{w}$ é paralelo a $\mathbf{z}$ se, e somente se, $\mathbf{v}$ é paralelo a $\mathbf{z}$.

11 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares prove que:

a) $(-\alpha)\,\mathbf{v} = -(\alpha\mathbf{v})$

b) $\alpha\,(-\mathbf{v}) = -(\alpha\mathbf{v})$

c) $-\alpha\,(-\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$

12 — Prove que $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então ou $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

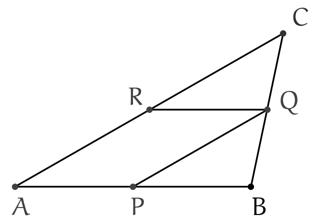
13 — Prove que se $\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ então $\alpha = \beta$.

14 — Prove que dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não paralelos então se

$$\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

então $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

15 — Se ΔEFG é um triângulo qualquer e P, Q e R são os pontos médios dos lados EF FG e GE respectivamente, demostrar que $EPQR$ é um paralelogramo



Respostas dos Exercícios

1 **a.)**$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$
b.)$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$
c.) Como $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$
d.)$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$
e.) Dica: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF}$
f.)$\overrightarrow{AC}$
g.) Dica: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$

2 **a.)**$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DE}$ **c.)**$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$
e.)$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC}$
f.)$2\overrightarrow{DC}$ **g.)**$\overrightarrow{DC}$

3 **a.)**$\mathbf{0}$ **b.)**$\mathbf{0}$
c.)$-\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$
d.)$-\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DE}$

4 $3\mathbf{f}_3$

5 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

6 Note que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\lambda}\lambda + 1\overrightarrow{AB}$ e como:

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = 0$$

temos que

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CM} = -(\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BC})$$

7 **a.)**

$$\overrightarrow{CD} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$$

$$\overrightarrow{BD} = 5\mathbf{u} - \mathbf{v}$$

b.) Os lados AD e BC são paralelos.

9 **a.)**$x = \frac{4u}{7} + \frac{3v}{14}, y = \frac{u}{7} - \frac{v}{14}$ **b.)**$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{4}$

11 Dica: Use as propriedades S1-S4 e M1-M5 das notas, vide página 10.
a.) Dicas: Observe que $(-\alpha)\,\mathbf{v} + (\alpha\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (Porque?)
Conclua que $(-\alpha)\,\mathbf{v}$ é o oposto de $(\alpha\mathbf{v})$.

13 $\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v} \Rightarrow$
$\alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow$
$(\alpha - \beta)\mathbf{v} = \mathbf{0}$
e logo $\|(\alpha - \beta)\mathbf{v}\| = |\alpha - \beta|\,\|v\| = 0$
como $\|v\| \neq 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$.

14 Dica: suponha $\lambda_1 \neq 0$ então $\mathbf{u} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v}$ e logo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos absurdo. Logo $\lambda_1 = 0$