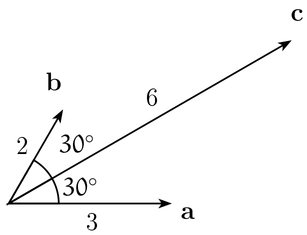
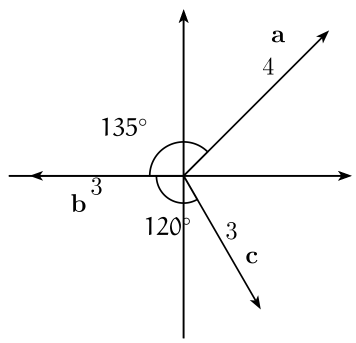
Lista 2 - Geometria Analítica

Dependência e Independência Linear de Vetores

1 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ como na figura abaixo. Escreva o vetor $\mathbf{c}$ como combinação de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.



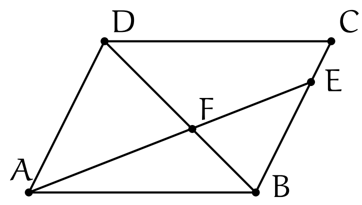
2 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ como na figura abaixo. Escreva o vetor $\mathbf{c}$ como combinação de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.



3 — Considere um paralelogramo $ABCD$. Seja E o ponto sobre o segmento BC tal que a distância de B a E é três vezes a distância de E a C. Seja F a intersecção de AE com a diagonal BD. Se $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ e $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, escreva o vetor $\overrightarrow{AF}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ usando:

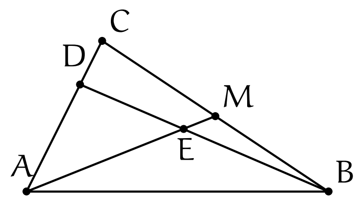
(a) Geometria plana clássica (semelhança de triângulos);

(b) Geometria analítica (combinações lineares de vetores);

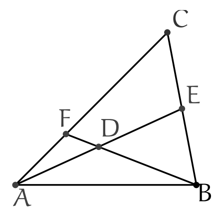


4 — Considere um triângulo ABC. Sejam M o ponto médio de BC e D o ponto sobre o segmento AC tal que a distância de D a A é três vezes a distância de D a C. Seja E a intersecção de AM com BD. Se $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, escreva o vetor $\overrightarrow{AE}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Cuidado! Não há triângulos semelhantes neste caso...



5 — Seja D o ponto médio da mediana AE do triângulo ΔABC. Se a reta BD corta o lado $\overline{AC}$ no ponto F, determine a razão que F divide $\overline{AC}$



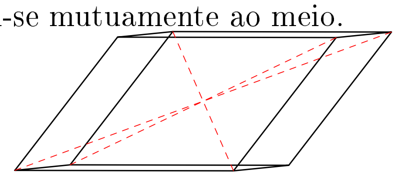
6 — Se $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$, prove que os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são LD para qualquer ponto O.

7 — Os pontos P e Q dividem os lados CA e CB de um triângulo ΔABC nas razões

$$\frac{x}{1-x}, \frac{y}{1-y}$$

respectivamente. Prove que se $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{AB}$ então $x=y=\lambda$.

8 — Chama-se diagonal de um paralelepípedo a um segmento ligando dois vértices não pertencentes a uma mesma face. Demostre que as diagonais de um paralelepípedo dividem-se mutuamente ao meio.



9 — Num quadrilátero $ABCD$, o Q o ponto de intersecção das diagonais AC e BD se interceptam dividem as diagonais nas razões $\frac{4}{3}$ e $\frac{2}{3}$ respectivamente. Em qual razão divide o ponto P determinado pelas intersecção os lados AB e CD a estes segmentos.

10 — Mostre que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

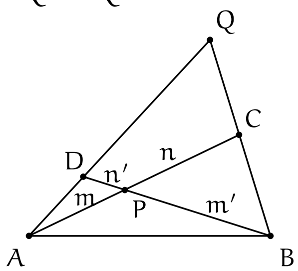
11 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\}$ também é L.I.

12 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w}-2\mathbf{u}\}$ também é L.I.

13 — Dado um tetraedro $ABCD$ explique por que os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ formam uma base para o espaço.

Extras

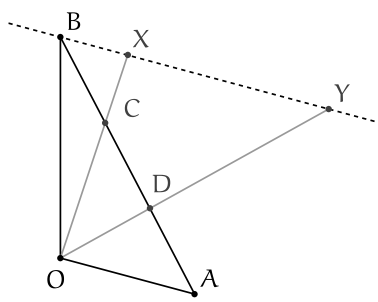
14 — As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de um quadrilátero $ABCD$ se interceptam no ponto P, que divide o segmento $\overline{AC}$ na razão $m:n$ e o segmento $\overline{BD}$ na razão $m':n'$. Dado Q o ponto de intersecção das retas contendo os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Encontre a razão $AQ:DQ$ e $BQ:CQ$.



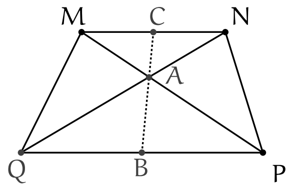
15 — Dado um triângulo ΔOAB, sejam C e D pontos sobre o lado AB dividindo esse segmento em três partes congruentes. Por B traçamos a reta paralela a OA, e sejam X e Y a intersecção dessa reta com as retas ligando OC e OD respectivamente.

a) Expresse os vetores $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ em função de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

b) Determine as razões nas quais X divide BY, C divide a OX e D divide a OY.



16 — Dado um paralelogramo $MNPQ$, seja A o ponto de intersecção das diagonais e sejam B e C os pontos médios dos lados opostos MN e PQ. Prove que se os pontos A, B e C estão sobre a mesma reta então $MNPQ$ é um trapézio (um trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos).



17 — Sejam B um ponto no lado ON do paralelogramo $AMNO$ e e C um ponto na diagonal OM tais que

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$$

e $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{1+n}\overrightarrow{OM}$. Prove que os pontos A, B e C estão na mesma reta.

3 (a) ...

(b) Observe que, como **a** e **b** não são paralelos, eles formam uma base para os vetores no plano. Logo todos os demais vetores do problema podem ser escritos em função desses.

O problema de encontrar $\overrightarrow{AF}$ está ligado a determinar onde fica o ponto F. Sobre esse tudo que sabemos é que é a intersecção dos segmentos BD e AE. Desse modo, para localizar F, precisamos inicialmente de duas equações:

- B, F e D são colineares:
$$\overrightarrow{BF} = \theta\overrightarrow{BD},$$
para algum θ real.
- A, F e E são colineares:
$$\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AE},$$
para algum λ real.

(Note que θ *e* λ *não são necessariamente iguais!)*

Escrevamos agora $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{BF}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, θ e λ. É fácil (por quê?) ver que:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$$

Então, relacionando $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{BF}$ temos:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

donde segue:

$$\lambda\left(\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}\right) = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Colocando tudo à esquerda da igualdade e deixando **a** e **b** em evidência:

$$\mathbf{a}(\lambda + \theta - 1) + \mathbf{b}\left(\frac{3}{4}\lambda - \theta\right) = \mathbf{0}$$

Como **a** e **b** são LI segue:

$$\begin{cases} \lambda + \theta - 1 = 0 \\ \frac{3}{4}\lambda - \theta = 0 \end{cases}$$

Finalmente, obtemos $\lambda = \frac{4}{7}$ e

$$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{7}\mathbf{a} + \frac{3}{7}\mathbf{b}.$$

4

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{7}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

5 Seja $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, então temos:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AE}}{2} \text{e} \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

e logo:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4}$$

Também temos que:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}}{1 + \lambda}$$

Como F, D e B são colineares então:

$$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AD} + (1 - \alpha)\overrightarrow{AD}$$

e assim

$$\overrightarrow{AF} = (1 - \frac{3}{4}\alpha)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\alpha\overrightarrow{AC}$$

E consequentemente $1 - \frac{3}{4}\alpha = 0$ e $\frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{1+\lambda}$ e assim $\lambda = 2$.

Logo F divide o segmento $\overline{AC}$ na razão $1 : 2$.

14

$$\frac{\|AQ\|}{\|DQ\|} = \frac{(n + m)m'}{(n' + m')n} \qquad \frac{\|BQ\|}{\|CQ\|} = \frac{(n' + m')m}{(n + m)n'}$$