Lista 3 - Geometria Analítica

Soma de Ponto e Vetor

1 — Prove que:

a) $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = \mathbf{P}$

b) $P + \mathbf{u} = Q + \mathbf{v}$ então $\mathbf{u} = PQ + \mathbf{v}$

c) $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

2 — Prove que as diagonais de um paralelogramo se dividem mutualmente ao meio.

3 — Sendo A e B dois pontos, mostrar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$

4 — Seja $ABCD$ um quadrilátero. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

5 — Seja G o baricentro (ou seja o ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC. Prove que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$.

6 — Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases.

7 — Prove que existe um único ponto comum as bissetrizes internas de um triângulo e que esse ponto, conhecido como incentro do triângulo é interior a ele.

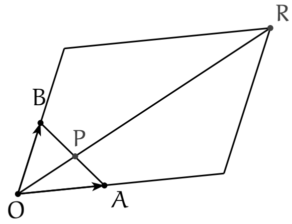
8 — Dado $ABCD$ um tetraedro, seja M o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC. Exprima o vetor $\overrightarrow{DM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$.

9 — Dado $ABCD$ um quadrilátero, e O um ponto qualquer e seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que

$$P = O + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

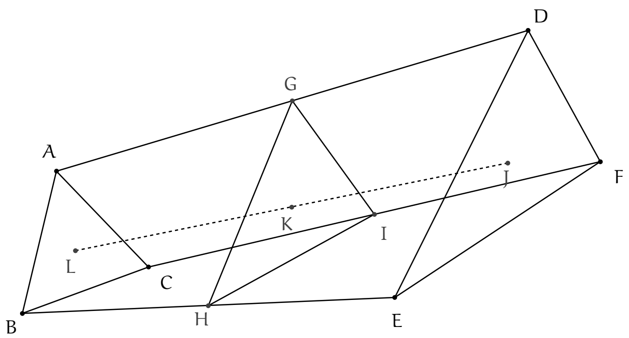
10 — Demostre que o baricentro de um triângulo, é também o baricentro do triângulo cujos vértices são pontos que dividem os lados do primeiro na mesma razão.

11 — Mostre que dados os vetores $m\overrightarrow{OA}$ e $n\overrightarrow{OB}$, sua soma é igual a $(n+m)\overrightarrow{OP}$, sendo P o ponto de intersecção do segmento AB com a reta OR, onde $R = O + m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.



Extras

12 — Num plano são dados dois triângulos ΔABC e ΔCDE. Sejam G, H, I os pontos médios dos segmentos $\overline{AC}, \overline{BD}$ e $\overline{CE}$ respectivamente. Mostre que os baricentros dos triângulos ΔABC ΔDEF e ΔGHI são colineares.



13 — Mostre que as alturas de um triângulo ΔABC de ângulos α, β, γ se interceptam num único ponto, denominado **ortocentro** cujo vetor posição é:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha\mathbf{a} + \operatorname{tg}\beta\mathbf{b} + \operatorname{tg}\gamma\mathbf{c}}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}$$

14 — Mostre que a bissetriz de um triângulo ΔABC se interceptam num único ponto, denominado **circuncentro** cujo vetor posição é:

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha\mathbf{a} + \operatorname{sen} 2\beta\mathbf{b} + \operatorname{sen} 2\gamma\mathbf{c}}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma}$$

15 — Dado O o circuncentro e H o ortocentro de um triângulo ΔABC, mostre que:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

Respostas dos Exercícios