Lista 5 - Geometria Analítica

Produto Interno e Vetorial

1 — Se $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$, encontre escalares a, b tais que $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$.

2 — Considere um triângulo cujos vértices são $(3, 1), (5, -2)$ e $(6, 3)$.

a) Ache os três ângulos internos do triângulo.

b) Ache também a área do triângulo encontrando sua altura.

c) Ache também a área do triângulo via produto vetorial.

3 — Dados vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ tais que $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ com $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 5$ e $\|\mathbf{c}\| = 7$. Calcule o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

4 — Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares então ele é um losango.

5 — Decomponha o vetor $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ como a soma de dois vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, com $\mathbf{v}_1$ paralelo ao vetor $\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_2$ ortogonal a este último.

6 — Suponha que $\overrightarrow{AB}$ seja o diâmetro de um circulo e seja C outro ponto qualquer desse circulo. Mostre que os vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ são ortogonais.

7 — Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

8 — Mostre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ se e somente se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

9 — Calcule o produto vetorial entre

a) $7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ e $5\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 13\mathbf{k}$

b) $6\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ e $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

c) $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

10 — Se $\mathbf{u} = (3, 4, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 3, 2)$ e $\mathbf{w} = (4, 2, 3)$ encontre

a) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - 7\mathbf{w}$

b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$,

d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$,

e) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$,

f) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

g) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

11 — Considere $A = (-1, 1, 2)$, $B = (0, 1, 3)$ e $C = (-1, 2, 8)$. Encontre a área do paralelogramo de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

12 — Considere $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 3)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 5)$.

a) Calcule a área do triângulo ABC.

b) Calcule a distância de B à reta $\overleftrightarrow{AC}$, isto é, encontre a altura do triângulo ABC relativa ao vértice B.

c) Calcule o volume do paralelepípedo com arestas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$.

d) Calcule a distância do ponto D ao plano que contém os pontos A, B e C.

13 — Sejam $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 3)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, a, 1-a)$. Encontre a de modo que o volume do paralelepípedo com arestas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ seja 10.

14 — Suponha que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2$. Calcule:

a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$;

b) $(\mathbf{2u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} + \mathbf{3w}) \cdot (-\mathbf{v})$.

15 — Dados os vetores $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$. Expresse o vetor $\mathbf{a} = (2, 2, 3)$ como combinação de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$;

16 — Dado $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$, determine $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{a}$ é ortogonal ao eixo z e

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, -1, 1)$$

17 — Determine $\mathbf{v} = (x, y, z)$ tal que

$$(x, y, z) \times (1, 2, -1) = (1, 1, 3)$$

$$(x, y, z) \cdot (3, 1, 1) = 3$$

18 — Sejam os pontos $P = (1, 1, 2)$, $Q = (1, 2, 0)$ e $R = (3, 1, 2)$ pontos médios dos lados de um triângulo ΔABC. Calcule a área do triângulo ΔABC.

19 — Prove que:

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

20 — Prove que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ de dois modos: primeiro calculando diretamente e segundo utilizando as propriedades de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

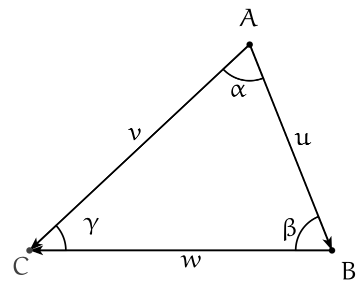
21 — Mostre que dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos se, e somente se, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

22 — Prove que em geral $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ pode ser escrito como o determinante da matriz que tem como componentes

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

23 — Dado um triângulo ΔABC como na figura a seguir. Usando o produto vetorial demonstre a lei dos senos:

$$\frac{\alpha}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\beta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\gamma}{\|\mathbf{u}\|}$$



24 — Mostrar que $(-5, 0), (0, 2)$ e $(0, -2)$ são os vértices de um triângulo isósceles e achar sua área.

25 — Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, a)$, com $a \neq 0$. Ache x de modo que o ponto $C = (x, x)$ seja o terceiro vértice do triângulo equilátero ABC.

3 Dado que $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, calculando o produto de ambos os lados da equação sucessivamente com $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ temos:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=-9$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=-25$$

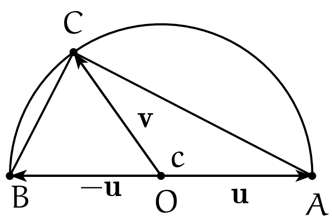
$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=-49$$

Resolvendo o sistema anterior temos $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{15}{2}$ e assim $\cos\theta=\frac{1}{2}$ e logo $\theta=\frac{\pi}{3}$

6 Denotando $\mathbf{u}=\overrightarrow{OA}, -\mathbf{u}=\overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{u}=\overrightarrow{OC}$ temos $\|\mathbf{u}\|=\|-\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=r$.

E assim:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\mathbf{v}+\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$$



15

$$\mathbf{a}=-\frac{9}{14}\mathbf{u}+\frac{12}{7}\mathbf{v}-\frac{11}{14}\mathbf{u}\times\mathbf{v}$$

16 $\mathbf{a}=(1,1,0)$

17 $\mathbf{v}=\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

22 Escreva o determinante em termos dos menores da primeira linha e compare com $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. Isto também prova que $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})$. Porque?

23 A área do triângulo é dada por:

$$A=\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}\|=\frac{1}{2}\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$$

e assim temos que

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}\|=\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$$

Mas $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\alpha$, $\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\|\operatorname{sen}\beta$ e $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|=\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\operatorname{sen}\gamma$

E logo:

$$\frac{\alpha}{\|\mathbf{w}\|}=\frac{\beta}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{\gamma}{\|\mathbf{u}\|}$$