

Lista 3 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Probabilidade em Espaços Equiprováveis

1 — Num evento científico temos 15 físicos e 11 matemáticos. Três deles serão escolhidos aleatoriamente para participar de uma mesa redonda.

- a) Qual a chance que sejam todos físicos?
- b) Qual a chance que pelo menos um seja matemático?
- c) Qual a chance que exatamente dois sejam matemáticos?

2 — Um dado vermelho e um branco são jogados, qual a probabilidade que o resultado do dado vermelho seja maior que a do branco?

3 — Qual a probabilidade de tirarmos 4 números distintos jogando 4 dados.

4 — Se 1 moeda for jogada 7 vezes.

- a) Qual a probabilidade que não saia nenhuma cara?
- b) Qual a probabilidade que saia 3 caras?
- c) Qual a probabilidade que saia pelo menos 3 caras?

5 — Um professor quer separar seus 10 alunos em dois grupos de 5 e resolveu fazer isso através de um sorteio. Dois alunos gostariam de ficar no mesmo grupo. Qual a probabilidade que isso ocorra?

6 — Suponha que A e B são eventos mutuamente excludentes tais que $\mathbb{P}[A] = 0,3$ e $\mathbb{P}[B] = 0,5$. Calcule a probabilidade de que

- a) ocorra pelo menos um dos dois eventos;
- b) ocorra A mas não ocorra B ;
- c) ambos eventos ocorram.

7 — Assumindo que todas as $\binom{52}{5}$ mãos de pôquer são igualmente prováveis, qual a probabilidade de sair

- a) um flush? (Uma mão é chamada flush se as 5 cartas forem do mesmo naipe.)
- b) um par? (duas cartas do mesmo valor.)
- c) dois pares?
- d) uma trinca? (três cartas do mesmo valor e as duas restantes não formam um par.)
- e) uma quadra? (quatro cartas do mesmo valor.)

8 — Se 8 torres são distribuídas aleatoriamente em um tabuleiro de xadrez calcule a probabilidade de que nenhuma das torres possa capturar qualquer uma das outras torres.

9 — (Blackjack) Duas cartas são escolhidas ao acaso de um baralho (de pôquer). Qual a probabilidade de sair um Ás e uma carta de 10 pontos (valete, dama, rei e 10.)?

10 — Uma pequena aldeia está formada por 20 famílias, das quais 4 têm um filho, 8 têm 2 filhos, 5 têm 3 filhos, 2 têm 4 filhos e 1 tem 5 filhos.

- a) Se uma família é escolhida ao acaso qual a probabilidade de que tenha i filhos, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
- b) Se uma das crianças é escolhida ao acaso qual a probabilidade dela vir de uma família com i crianças, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

11 — Se dois dados são lançados, qual a probabilidade de que a soma das faces viradas para cima seja i ?

12 — Dois dados são lançados até que a soma seja 5 ou 7. Calcule a probabilidade de que o 5 ocorra primeiro. Dica: Seja E_n o evento em que a soma seja 5 e não tenha ocorrido um 5 ou 7 nos $n - 1$ primeiros

lançamentos. Calcule $\mathbb{P}[E_n]$ e argumente que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n]$ é a probabilidade a ser calculada.

13 — Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 7 bolas negras. Os jogadores A e B retiram uma bola por vez (sem substituição) até sair uma bola vermelha pela primeira vez. Calcule a probabilidade de que o jogador A escolha primeiro a bola vermelha.

14 — Uma urna contém n bolas brancas e m bolas negras, onde n e m são números inteiros positivos.

- Se duas bolas são escolhidas ao acaso, qual a probabilidade delas serem da mesma cor?
- Se uma bola é escolhida ao acaso e é recolocada dentro da urna antes da segunda bola ser escolhida, qual a probabilidade de que as bolas escolhidas sejam da mesma cor?
- Mostre que a probabilidade encontrada em b) é maior que a probabilidade encontrada em a).

15 — Um professor seleciona 10 problemas e informa a sala que o exame final consistirá em 5 exercícios escolhidos ao acaso desta lista de problemas. Se m estudante sabe fazer 7 dos 10 problemas qual a probabilidade de responder corretamente

- os 5 problemas;
- pelo menos 4 dos problemas?

16 — Dois dados são lançados em sequência n vezes. Calcule a probabilidade de que dois 6 apareçam no mesmo lançamento pelo menos uma vez. Estime o valor de n para que esta probabilidade seja pelo menos $\frac{1}{2}$.

17 —

- Se N pessoas, incluindo A e B, são dispostas ao acaso em uma fileira, qual a probabilidade de que A e B estejam um do lado do outro?
- Calcule a probabilidade do enunciado anterior quando as pessoas são dispostas em uma roda.

18 — Um professor possui um chaveiro com 15

chaves. Se consideramos que ele escolhe as chaves de modo aleatório.

- Qual a probabilidade dele abrir a porta exatamente na sétima tentativa se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta exatamente na sétima tentativa se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de 7 tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de 7 tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de k tentativas, se considerarmos que ele descarta as chaves já tentadas?
- Qual a probabilidade dele abrir a porta antes de k tentativas, se considerarmos que ele não descarta as chaves já tentadas?

19 — Uma mulher tem n chaves das quais uma abrirá a porta do seu carro.

- Se escolhe as chaves ao acaso, desconsiderando as chaves que não abrem o carro, qual a probabilidade de que conseguirá abrir o carro na k -ésima tentativa?
- Qual essa probabilidade se ela não desconsiderar as chaves já retiradas?

20 — Se há 12 pessoas desconhecidas em uma sala, qual a probabilidade de nenhum par de pessoas faça aniversário no mesmo mês?

21 — Um grupo de 6 homens e 6 mulheres é dividido ao acaso em dois grupos iguais. Qual a probabilidade de que ambos grupos tenham o mesmo número de homens?

22 — Calcule a probabilidade de que uma mão de 13 cartas contenha

- um ás e um rei de cada naipe;
- pelo menos um grupo de quatro cartas do mesmo valor dos treze valores possíveis?

Respostas dos Exercícios

1 a.) $\frac{\binom{15}{3}}{\binom{26}{3}} = \frac{7}{40}$ b.) $1 - \frac{7}{40} = \frac{33}{40}$ c.) $\frac{\binom{11}{2}\binom{15}{1}}{\binom{26}{3}}$

4 a.) $P = \frac{1}{2^7} = 1/128$

b.) $P = \binom{7}{3} \frac{1}{2^7} = 35/128$

c.) $P = \binom{7}{3} \frac{1}{2^7} + \binom{7}{4} \frac{1}{2^7} + \binom{7}{5} \frac{1}{2^7} + \binom{7}{6} \frac{1}{2^7} + \binom{7}{7} \frac{1}{2^7} = 99/128$

5 $P = \frac{\binom{8}{5}\binom{3}{3}}{\binom{10}{5}\binom{5}{5}} = \frac{2}{9}$

6 a.) 0,8 b.) 0,3 c.) 0

7 a.) Dica: Faça primeiramente a escolha do naipe e depois do valor das cartas.

$4\binom{13}{5}$

b.) $13\binom{4}{2}12\binom{4}{1}11\binom{4}{1}10\binom{4}{1} \approx 0,42$ c.) ≈ 0.04754 . d.) 0.021128 e.) 1/4165

8 $P = \frac{8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2}{(64)(63)(62)(61)(60)(59)(58)(57)}$

9 $P = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{2}} \frac{32}{663}$

10 a.) $P(\text{família tem } i \text{ filhos}) = \frac{n_i}{20}$

b.) $P(\text{criança vir de família que tem } i \text{ filhos}) = \frac{i \cdot n_i}{48}$

| | | | | | | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 11 | i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| | P(i) | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

12 a.) Dica: Use o exercício anterior. E veja que para que ocorra E_n não ocorreu 5 ou 7 $n - 1$ vezes e finalmente ocorreu 5.

Assim

$P(E_n) = \frac{26^{n-1} \cdot 4}{35^n}$.

b.) Como os E_n são mutuamente excludentes

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Agora use a fórmula para a soma de uma P.G chegando à $P = 2/5$

OBS: A soma de infinitos termos de uma P.G. é

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_0 r^i = \frac{a_0}{1-r}$$

(por que?)

13 $P_i = P[\text{tirar a bola vermelha na } i\text{-ésima retirada.}]$

$P_1 = 3/10$

$P_3 = \frac{7}{10} \frac{6}{9} \frac{3}{8}$

$P_5 = \frac{7}{10} \frac{6}{9} \frac{5}{8} \frac{4}{7} \frac{3}{6}$

$P_6 = \frac{7}{10} \frac{6}{9} \frac{5}{8} \frac{4}{7} \frac{3}{6} \frac{2}{5} \frac{3}{4}$

$P = 7/12$

14 a.) $P = \frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$

b.) $P = \frac{n \cdot n + m \cdot m}{(n+m)(n+m)}$

15 a.) $1/12$

b.) $P = \frac{\binom{7}{5} + \binom{7}{4} \binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} = 5/12$

16 Seja E_n^c o evento de não ocorrência de 6 em ambos os dados. Então $\mathbb{P}(E_n^c) = \frac{35^n}{36^n}$

Logo $\mathbb{P}(E_n) = 1 - \frac{35^n}{36^n}$ logo $n \geq 25$

17 a.) Dica: Dois casos A antes do B e B antes do A.

Caso A antes do B. Nesse caso temos $N - 1$ modos de escolher a posição do A;

O outro caso é análogo:

$$2(N - 1)!/N! = 2/N$$

b.) Numa roda existem $(N - 1)!$ modos de ordenar as pessoas. Use raciocínio análogo ao item a.

$$P = 2(N - 2)!/(N - 1)! = 2/N$$

18 a.) $P = (14/15)^6 * 1/15$

b.) $P = \frac{14}{15} \frac{13}{14} \frac{12}{13} \frac{11}{12} \frac{10}{11} \frac{9}{10} \frac{1}{9} = 1/15$

c.) Interpretação: número de tentativas é menor ou igual a 6:

$$\sum_{i=1}^6 P = (14/15)^{i-1} 1/15 = 2/5$$

d.) Interpretação: número de tentativas é menor ou igual a 6: $\frac{6}{15}$ (veja item b)

e.) $P = \frac{k-1}{15}$ para $k \leq n$ e $P = 1$, se $k \geq n + 1$

f.) $1 - \left(\frac{14}{15}\right)^{k-1}$

19 a.)

$$P[N = k] = (1 - 1/n)(1 - 1/(n - 1))(1 - 1/(n - 2)) \cdots (1 - 1/(n - (k - 1))) = 1/n$$

b.)

$$P[N = k] = (1 - 1/n)^{k-1} 1/n$$

(Obs: é uma geométrica com $p=1/n$)

20 $P = \frac{12!}{12^{12}}$

21

$$P = \frac{\binom{6}{3} \binom{6}{3}}{\binom{12}{6}}$$

22 a.) 11/6431950

b.) 143/4165