UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Lista 6 - Introdução à Probabilidade e Estatística

Variáveis Aleatórias Contínuas

1 — Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{se } -1 < X < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual é o valor de c?

b) Qual é a função distribuição acumulada de X?

2 — Um sistema formado por uma peça origina1 mais uma sobressalente pode funcionar por uma quantidade de tempo aleatória X. Se a densidade de X é dada, em unidades de meses, por

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-x/2} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

qual é a probabilidade de que o sistema funcione por pelo menos 5 meses?

3 — Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} C(2x-x^3) & \text{se } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Poderia f ser uma função densidade de probabilidade? Caso positivo, determine C. Repita considerando que a função f seja dada por

$$f(x) = \begin{cases} C(2x-x^2) & \text{se } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

4 — A função densidade de probabilidade de X, que representa a vida útil de certo tipo de equipamento eletrônico, é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Determine $P(X > 20)$

b) Qual é função distribuição acumulada de X?

c) Qual é a probabilidade de que, de 6 componentes como esse, pelo menos 3 funcionem por pelo menos 15 horas? Que suposições você está fazendo?

5 — Um posto de gasolina é abastecido com gasolina uma vez por semana. Se o volume semanal de vendas em milhares de litros é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x^4) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

qual deve ser a capacidade do tanque para que a probabilidade do fornecimento não ser suficiente em uma dada semana seja de $0,01$?

6 — Calcule $E[X]$ se X tem uma função de densidade dada por

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^2} & \text{se } x > 5 \\ 0 & \text{se } x \leq 5 \end{cases}$$

7 — O tempo de vida, medido em horas, de uma válvula eletrônica é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o tempo de vida esperado dessa válvula.

8 — Trens em direção ao destino A chegam na estação em intervalos de 15 minutos a partir das $7:00$ da manhã, enquanto trens em direção ao destino B chegam à estação em intervalos de 15 minutos começando as 7 : 05 da manhã.

a) Se certo passageiro chega à estação em um horário uniformemente distribuído entre 7 : 00 e 8 : 00 da manhã e pega o primeiro trem que chega, em que proporção de tempo ele vai para o destino A?

b) E se o passageiro chegar em um horário uniformemente distribuído entre 7 : 10 e 8 : 10 da manhã?

9 — Você chega na parada de ônibus as 10 : 00, sabendo que o ônibus chegará em algum horário uniformemente distribuído entre 10 : OO e 10 : 30.

a) Qual é a probabilidade de que você tenha que esperar mais de 10 minutos?

b) Se, as 10 : 15, o ônibus ainda não tiver chegado, qual é a probabilidade de que você tenha que esperar pelo menos mais 10 minutos?

10 — Se Y tem distribuição uniforme no intervalo $(0, 5)$, qual a probabilidade de que as raízes do polinômio $p(x) = 4x^2 + 4xY + Y + 2$ sejam ambas reais?

11 — Se X é uma variável aleatória normal com parâmetros $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 36$, calcule $P(X > 5), P(4 < X < 16), P(X < 8), P(X < 20)$ e $P(X > 16)$.

12 — O volume anual de chuvas (em mm) em certa região é normalmente distribuído com $\mu = 40$ e $\sigma = 4$. Qual é a probabilidade de que, a contar deste ano, sejam necessários mais de 10 anos antes que o volume de chuva em um ano supere 50 mm? Que hipóteses você está adotando?

13 — Um homem praticando tiro ao alvo recebe 10 pontos se o tiro estiver a 1 cm do alvo, 5 pontos se estiver entre 1 e 3 cm do alvo, e 3 pontos se estiver entre 3 e 5 cm do alvo. Determine o número esperado de pontos que ele receberá se a distância do ponto de tiro até o alvo for uniformemente distribuída entre O e 10.

14 — Suponha que X seja uma variável aleatória normal com média 5. Se $P(X > 9) = 0,2$, qual é o valor de Var(X), aproximadamente?

15 — Seja X uma variável aleatória normal com média 12 e variância 4. Determine o valor de c tal que $P(X > c) = 0,1O$.

16 — Se 65 por cento da população de uma grande comunidade são a favor de um aumento proposto para as taxas escolares, obtenha uma aproximação para a probabilidade de que uma amostra aleatória de 100 pessoas contenha

a) pelo menos 50 pessoas a favor da proposta;

b) entre 60 e 70 pessoas (inclusive) a favor;

c) menos de 75 pessoas a favor.

17 — A espessura de uma forja de alumínio (em mm) é normalmente distribuída com $\mu = 22,86$ e $\sigma = 0,0762$. Os limites de especificação foram dados como $22,86 \pm 0,127$ mm.

a) Que percentual de forjas será defeituoso?

b) Qual é o valor máximo permissível de σ que permitirá que não exista mais de 1 forja defeituosa em 100 se as espessuras forem de $\mu = 22,86$ e σ?

18 — Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ. Defina Y por $Y = \lfloor X \rfloor + 1$, onde $\lfloor X \rfloor$ denota a parte inteira de X. Qual a distribuição de Y?

19 — Encontre a função de densidade de e^{-2X} e de $\log(X)$ onde X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro 1.

20 — Determine a densidade de $Y = |X|$, onde X tem distribuição normal padrão.

Respostas dos Exercícios

1 a) $c\int_{-1}^{1} c(1-x^2)dx = 1 \to c = 3/4$.
b) $F(x)\frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-x^2)dx = \frac{3}{4}(x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}), -1 < x < 1$.

2 a) Como $\int xe^{-x/2}dx = -2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2}$ temos que $\int_0^\infty cxe^{-x/2}dx = 1 \to c = 1/4$.
b) $\mathbb{P}[X > 5] = \frac{1}{4}\int_5^\infty xe^{-x/2}dx = \frac{1}{4}(10e^{-5/2}4e^{-5/2} = \frac{14}{4}e^{-5/2}$.

3 a) Não.
b) Não.

4 $P(X > 20) = \int_{20}^{\infty}\frac{10}{x^2}dx = 1/2$.
$F(x) = \int_{10}^{x}\frac{10}{u^2}du = 1 - \frac{10}{x}, x > 10.F(x) = 0$ para $x \leq 10$.
$\sum_{i=1}^{6}\binom{6}{i}(\frac{2}{3})^i(\frac{1}{3})^{6-i}$ já que $P(X > 15) = \frac{10}{15}$. Assumimos independência dos eventos em que o tempo de funcionamento excede as 15 horas.

5 Encontre C tal que $0,01 = \int_c^1 5(1-x^4)dx = (1-c)^5$.

6 a) $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^2e^{-x/2}dx = 2\Gamma(3) = 4$.
b) Pela simetria de f em torno de $x = 0$ tem-se que $\mathbb{E}[X] = 0$.
c) $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \frac{5}{x}dx = \infty$.

7 $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x^2e^{-x}dx = \Gamma(3) = 2$.

8 a) Seja $X \sim$ Uniforme $[0, 60]$ o horário no qual chega o passageiro. $P([5 < X < 15] \cup [20 < X < 30] \cup [35 < X < 45] \cup [50 < X < 60]) = \frac{2}{3}$.
b) Idem que em a).

9 Seja $X \sim$ Uniforme $([0, 30])$.
a) $P(X > 10) = \frac{2}{3}$.
b) $P(X > 25|X > 15) = \frac{P(X>25)}{P(X>15)} = 1/3$.

10 $p(x) = 4x^2 + 4xY + Y + 2$ é um polinômio em x de grau 2 com coeficientes $4, 4Y$ e $Y + 2$.

11 $P(X > 5) = P(\frac{X-10}{6} > \frac{5-10}{6}) = P(\frac{X-10}{6} > -\frac{5}{6}) = 1-\Phi(-\frac{5}{6})$, onde $\Phi(.)$ é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória com distribuição normal padrão.
$P(4 < X < 16) = P(\frac{4-10}{6} < \frac{X-10}{6} < \frac{16-10}{6}) = P(-1 < \frac{X-10}{6} < 1) = 2\Phi(1) - 1$.
$P(X < 20) = P(\frac{X-10}{6} < \frac{20-10}{6}) = P(\frac{X-10}{6} < \frac{5}{3}) = \Phi(\frac{5}{3})$.
$P(X > 16) = P(\frac{X-10}{6} > \frac{16-10}{6}) = P(\frac{X-10}{6} > 1) = 1 - \Phi(1)$.

12 $P(X < 50)^{10} = P(\frac{X-40}{4} < \frac{50-40}{4})^{10} = P(\frac{X-40}{4} < 2,5)^{10} = \Phi(2,5)^{10}$. Assumimos independência.

13 Denotemos a pontuação obtida por X. Logo, $\mathbb{E}[X] = 10\frac{1}{10} + 5\frac{2}{10} + 3\frac{2}{10} = 2,6$.

14 $0,2 = \mathbb{P}[X > 9] = \mathbb{P}[\frac{X-5}{\sigma} > \frac{9-5}{\sigma}] = \mathbb{P}[Z > \frac{4}{\sigma}] = \Phi(\frac{4}{\sigma})$, onde σ é o desvio padrão, $Z \sim \mathcal{N}(5, \sigma^2)$ e Φ é a função de distribuição acumulada de Z. Da tabela da normal, $\mathbb{P}[Z \leq 0,84] \approx 0,80$ e assim $0,84 \approx frac4\sigma$. Então, a variância é aproximadamente $\sigma^2 \approx 22,66$.

15 $c = 14,56$.

16 Seja X o número de pessoas a favor da proposta. Logo, X tem distribuiçaõ Binômial com média 65 e desvio padrão $\sqrt{650,35} \approx 4,77$. Seja $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
a.)$\mathbb{P}[X \geq 50] \approx 0,9994$. **b.)**$\mathbb{P}[59,5 \leq\leq 70,5] \approx 2\mathbb{P}[Z \leq 1,15] - 1 \approx 0,75$. **c.)**$\mathbb{P}[X \leq 74,5] \approx 0,977$.

17 **a.)**$\mathbb{P}[22,86 - 0,127 < X < 22,86 + 0,127] = \mathbb{P}[\frac{-0,127}{0,0762} < Z < \frac{0,127}{0,0762}] = 2\Phi(1,666) - 1 = 0,903$. Logo, 9,7 por cento serão defeituosos. **b.)**$\mathbb{P}[\frac{-0,127}{\sigma} < Z < \frac{0,127}{\sigma}]2\Phi(\frac{0,127}{\sigma}) - 1 = 0,99$. Logo, $\Phi(\frac{0,127}{\sigma}) = 0,995$. Logo, $\frac{0,127}{\sigma} = 2,575$ e $\sigma = 0,049$.

18 Como $X \geq 0$ então $Y \geq 1$ e

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y = k] &= \mathbb{P}[k-1 \leq X < k] \\
&= F_X(k) - F_X(k) \\
&= \left(1 - e^{-\lambda k}\right) - \left(1 - e^{-\lambda(k-1)}\right) \\
&= \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}\left(1 - e^{-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Logo, $Y \sim$Geométrica$(p), p = 1 - e^{-\lambda}$.

19 Sendo X continua com densidade f_X e $Y = \phi(X)$ com $\phi(x) = e^{-2x}$ monótona temos que Y tem densidade f_Y dada por

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X\left(\phi^{-1}(y)\right)|\frac{d}{dy}\phi^{-1}(y)| \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

para $0 < y < 1$ já que $0 < \phi(x) < 1$ e $\phi^{-1}(y) = -\frac{1}{2}\ln(y)$.
Se $Y = \log(X)$, calcule $F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \leq y]$ e derive em relação a y.

20

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \leq y] \\
&= \mathbb{P}[|X| \leq y] \\
&= \mathbb{P}[-y \leq X \leq y] \\
&= 2\mathbb{P}[0 < X \leq y] \\
&= \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt
\end{aligned}
$$

Logo, para $y > 0$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.
\end{aligned}
$$