Segundo roteiro de exercícios no Scilab
Cálculo Numérico

Rodrigo Fresneda

7 de março de 2012

Guia para respostas:

Entregue os três algoritmos pedidos ao final, além da tabela (1) preenchida.

Data limite para entrega: 25/03/2012

1 Movimento num campo central

1.1 Introdução

O movimento de uma partícula material de massa m num campo de força do tipo

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr}(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}\,,$$

onde o potencial $U(r)$ só depende da distância r até um ponto fixo dado de massa M. Na gravitação Newtoniana, o potencial é da forma

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}\,, \tag{1}$$

e se verifica a existência de órbitas fechadas (elipses). A energia do sistema pode ser escita como

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)\ .$$

Os pontos críticos $\dot{r} = 0$ determinam pontos de retorno da trajetória (se a função $r(t)$ é crescente, no ponto crítico ela a passar a ser decrescente, e vice-versa). Na situação (1), o estudo do potencial efetivo $U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$ permite concluir a existência de dois pontos de retorno se $E < 0$, que corresponde a movimentos limitados, como se depreende do gráfico da função:

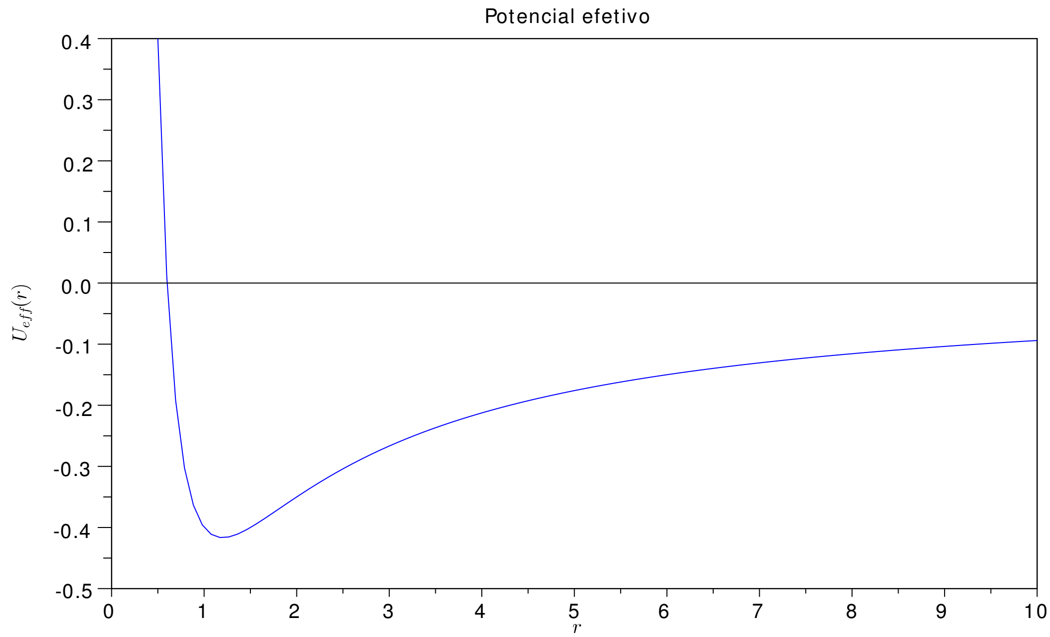

Figura 1: Potencial efetivo U_{eff} como função da distância r

Algoritmo 1 código para geração da figura 1

```
r=linspace(0.5,10,100);
xtitle("Potencial efetivo","$r$","$U_{eff}(r)$");
plot(r,-r^-1+0.6*r^-2,[0 10],[0 0],"k-");
```

Note que o potencial efetivo tende a infinito quando a distância r tende a zero, impossibilitando de maneira geral a "queda" da partícula ao centro $r = 0$. Isto se dá graças ao termo "centrífugo" $\frac{M^2}{2mr^2}$ que passa dominar em pequenas distâncias.

Para potenciais não-Newtonianos, no entanto, o fenômeno de queda ao centro pode ocorrer: basta que o termo potencial $U(r)$ caia suficientemente rápido à medida que $r \to 0$.

1.2 O potencial $U(r) = -\frac{\alpha}{r^3}$

De início, vamos estudar o potencial $-\alpha/r^3$. Considere $\alpha = 1$ e $M^2/2m = 1$ e plote o gráfico do potencial efetivo $U_{eff}(r) = -\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2}$ no domínio $[0.5, 10]$. Ele deve se parecer com:

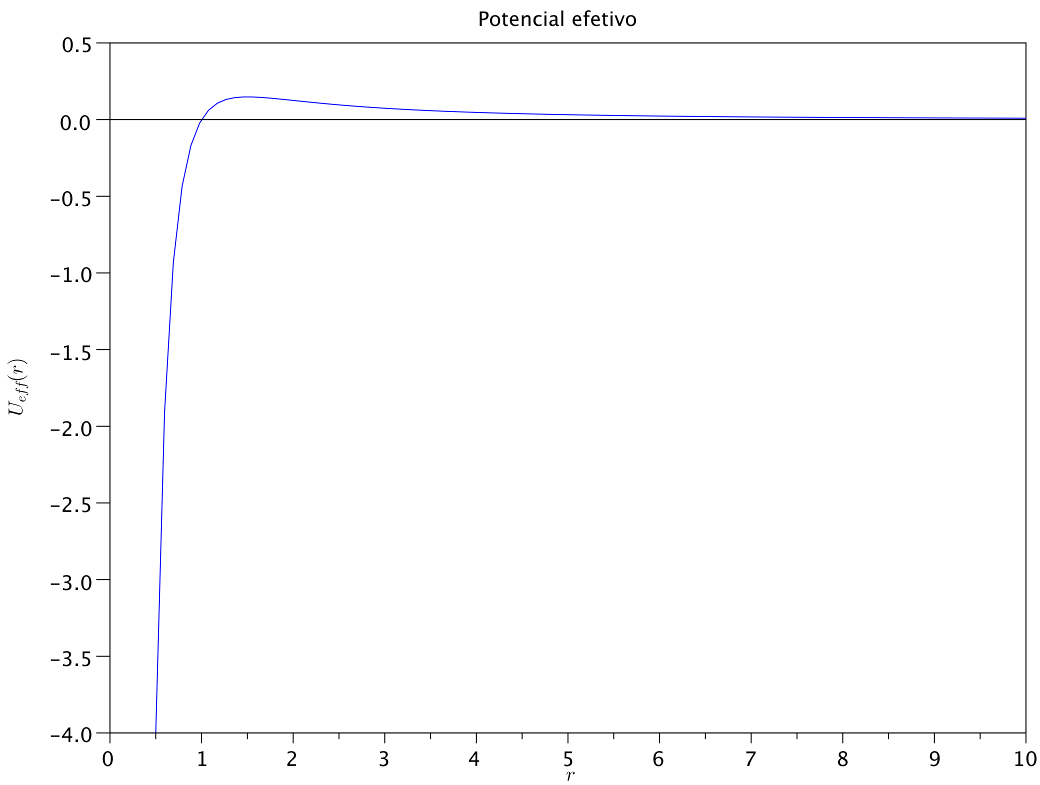

Figura 2: Potencial efetivo U_{eff} como função da distância r

Observe como o potencial atinge um máximo em $r = 1.5$. Para energias $E < 0$, o movimento da partícula é limitado, com queda ao centro.

Sua tarefa é determinar, por métodos numéricos, qual o raio máximo da trajetória da partícula, para um dado valor de E, com $E < 0$. Para tanto, é preciso encontrar a raiz real da equação cúbica

$$-\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} = E$$

Escreva três algoritmos: um de bissecção, um de falsa-posição e um de Newton-Raphson. Cada algoritmo deve receber como entrada um dado valor de E, e deve contar o número de iterações N até que o erro

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant eps \cdot \max\{1, |x_{n+1}|\}$$

onde eps é o épsilon da máquina no Scilab. Lembre-se de procurar um x_0 próximo da raiz, utilizando o gráfico da função. Utilize seus algoritmos para completar a tabela:

E	bissecção				falsa-posição				Newton			
	$[a,b]$	raiz	N	p	$[a,b]$	raiz	N	p	x_0	raiz	N	p
-1												
-10												
-100												
-1000												

Tabela 1: tabela comparativa dos algoritmos para alguns valores de energia E

Na tabela, N é o número de iterações necessárias para se atingir *eps*, e p é a ordem de convergência, estimada de acordo com o exercício 12c da lista 2. Também preenche os parâmetros iniciais para cada algoritmos (os extremos a e b na bissecção e falsa-posição, e primeiro ponto x_0 para Newton).

Referências

[1] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mechanics*, vol.1, Butterworth-Heinemann; 3 edition.