Quinto roteiro de exercícios no Scilab
Cálculo Numérico

Rodrigo Fresneda

4 de maio de 2012

1 Equações Diferenciais Ordinárias

Equação diferencial é uma equação que contém derivadas de uma função desconhecida. Quando a função depende apenas de uma variável e envolve apenas derivadas de ordem 1, a equação é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem. A forma geral das EDOs de primeira ordem é dada por

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \tag{1}$$

A solução analítica de uma EDO é uma função diferenciável $y\left(x\right)$ tal que $y'\left(x\right) = f\left(x, y\left(x\right)\right)$. Em muitos casos não é possível obter a solução analítica de uma EDO e somos então obrigados a recorrer a métodos numéricos. A solução numérica consiste dos valores da variável dependente y determinados para cada valor da variável independente x dentro de um domínio determinado. A solução é formada por um conjunto de pontos discretos $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), ..., \left(x_n, y_n\right)$ que representam de forma aproximada a função $y\left(x\right)$ dentro do domínio.

1.1 Atividade 1: método de Euler

O método de Euler é uma das técnicas mais simples para a solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Neste método, a solução numérica aproximada no ponto $\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)$ é calculada a partir da solução conhecida no ponto $\left(x_i, y_i\right)$ por meio das equações:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + f_i h \end{aligned}$$

sendo f_i uma estimativa para dy/dx no ponto x_i e h o passo de integração. No método de Euler explícito assume-se que em uma pequena distância h na vizinhança de $\left(x_i, y_i\right)$ a função $y\left(x\right)$ tem inclinação constante e igual à inclinação em $\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)$. Esta inclinação é calculada a partir da própria equação diferencial :

$$f_i = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = f\left(x_i, y_i\right)$$

Desta forma o próximo ponto da solução numérica em $\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)$ é calculado por meio das equações:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + f\left(x_i, y_i\right) h \end{aligned}$$

Exercícios

1. Qual a solução exata da EDO
$$\frac{dy}{dx} = -y\,,$$
com condição inicial $y(0) = 1$? Quanto vale $y(1)$?

2. Escreva uma função no Scilab para a solução de uma EDO de primeira ordem utilizando o método explícito de Euler. A função deve ter como argumentos de entrada: a própria EDO, os limites do domínio, a condição inicial e o valor de h.

3. Resolva a EDO do exercício 1 usando o programa que você criou. Resolva-a para $x \in [0, 1]$ com passos $h = 0.1$, $h = 0.05$ e $h = 0.01$. Trace em um mesmo gráfico as soluções de cada caso e compare com a solução teórica do exercício 1. Comente seus resultados.

4. Um capacitor é um dispositivo elétrico cuja relação entre a corrente que circula por ele $i(t)$ e a tensão entre os seus terminais $\upsilon_C(t)$ é dada por
$$i(t) = C\frac{d\upsilon_C(t)}{dt}$$
Considere o circuito RC mostrado na figura abaixo:

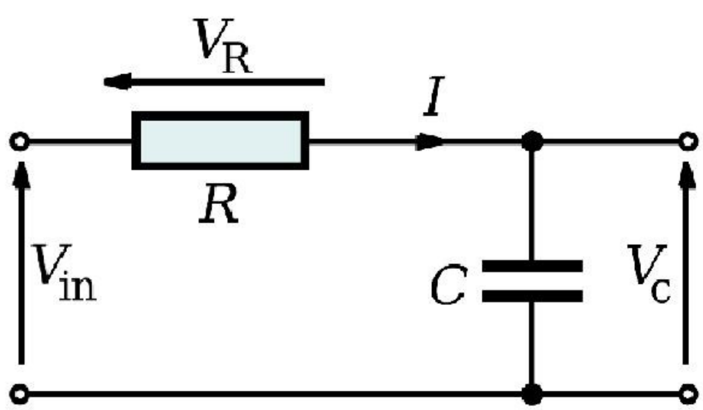

Figura 1: Circuito RC

Usando a Lei de Kirchoff das malhas é possível mostrar que a EDO que rege este circuito, com $\upsilon_{in}(t) = 0$, é dada por:
$$\frac{d\upsilon_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}\upsilon_C(t) \tag{2}$$
Supondo que a tensão inicial no capacitor é $\upsilon_C(0) = 5V$, resolva numericamente a equação (2) e faça a um gráfico de $\upsilon_C(t)$ para $0 \leq t \leq 30s$. Considere $R = 10\Omega$ e $C = 0.2F$. Quanto tempo leva para a tensão no capacitor ficar abaixo de $0.1V$?

1.2 Atividade 2: Método de Euler Melhorado

No método de Euler apresentado na atividade anterior considera-se que a inclinação entre os pontos (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) é constante e igual à derivada de $y(x)$ no ponto (x_i, y_i). No método de Euler melhorado a inclinação utilizada no cálculo de y_{i+1} é modificada para incluir a variação da inclinação no intervalo compreendido entre x_i e x_{i+1}. A inclinação no início de um intervalo, como no caso anterior, é dada por:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i)$$

A inclinação no final do intervalo é calculada com auxílio de uma estimativa para y_{i+1}, $\bar{y}_{i+1}$, obtida pelo método de Euler:

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\, h$$

A estimativa da inclinação no final do intervalo fica:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_{i+1}} = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$$

De posse das estimativas para as inclinações de $y(x)$ no início e fim do intervalo podemos calcular a média destas inclinações para determinar o valor de y_{i+1}:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})}{2} h$$

Exercícios

1. Escreva uma função no Scilab para determinar a solução de uma EDO utilizando o método de Euler modificado.
2. Repita os exercícios 3 e 4 da atividade 1 utilizando a função que você criou. Compare os resultados obtidos.

2 Sistema de EDO's

Podemos utilizar os métodos das seções anteriores para resolver sistemas de equações diferenciais de primeira ordem como

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots & & \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{array}$$

Por exemplo, para $n = 2$, temos

$$\begin{array}{rcl} y' & = & f(x, y, z) \\ z' & = & g(x, y, z) \end{array}$$

e o método de Euler fica

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Utilize esse método para resolver o sistema de equações diferenciais,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\,, \end{aligned}$$

que representam um sistema dinâmico não-linear conhecido como atrator de Lorenz, que exibe comportamento caótico. O sistema de Lorenz pode ser escrito como a seguinte função no Scilab:

Algoritmo 1 Sistema de Lorenz

```
function [dxdt] = lorenz(x)
rho = 28;
sigma = 10;
beta = 8/3;
dxdt = zeros(3,1);
dxdt(1) = sigma*(x(2) - x(1));
dxdt(2) = X(1)*(rho - x(3)) - x(2);
dxdt(3) = x(1)*x(2) - beta*x(3);
endfunction
```

Faça um gráfico de $y \times x$ para os parâmetros $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, $\sigma = 10$, $x(0) = 10$, $y(0) = z(0) = 10$ e $t \in [0, 100]$.

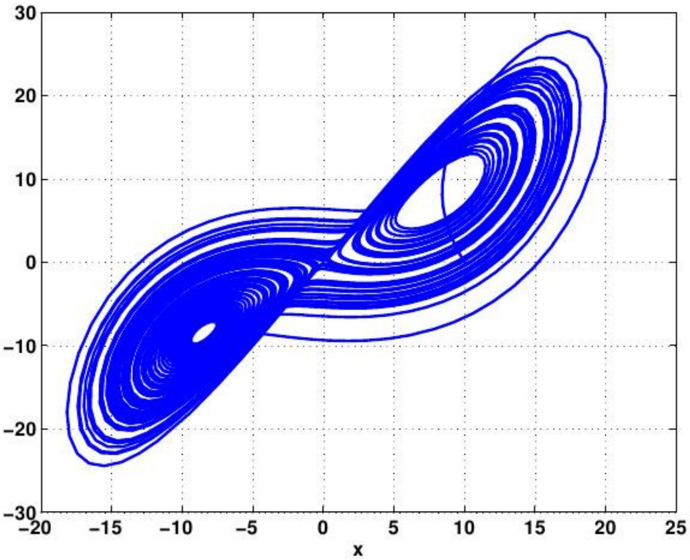

Figura 2: Um gráfico da trajetória do sistema de Lorenz para os valores $\rho = 28$, $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$

2.1 Runge-Kutta de quarta ordem

Como aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem, vamos resolver numericamente a equação diferencial

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_\odot}{r^3}\mathbf{r} \tag{4}$$

que descreve a aceleração de um corpo material num campo central do tipo gravitacional. Aqui pontos significam derivadas com relação ao parâmetro t, "tempo", e $\mathbf{r}$ é o vetor em coordenadas cartesianas

$$\mathbf{r} = (x, y, z)\ ,\ \dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{r}\,.$$

Vamos considerar $M_\odot$ como sendo a massa do Sol, e vamos adotar o sistema de unidades astronômicas, de tal modo que $GM_\odot = 4\pi^2$ e o tempo é medido em anos.

A equação diferencial (4) é um sistema de três EDOs de segunda ordem, portanto pode ser reescrita como um sistema de seis EDOs de primeira ordem.

Escreva o sistema (4) em termos de EDOs de primeira ordem. Ele deve ter a forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\left(x_1, x_3, x_3, x_4, x_5, x_6, t\right) \\ f_2\left(x_1, x_3, x_3, x_4, x_5, x_6, t\right) \\ f_3\left(x_1, x_3, x_3, x_4, x_5, x_6, t\right) \\ f_4\left(x_1, x_3, x_3, x_4, x_5, x_6, t\right) \\ f_5\left(x_1, x_3, x_3, x_4, x_5, x_6, t\right) \\ f_6\left(x_1, x_3, x_3, x_4, x_5, x_6, t\right) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Encontre as funções $f_i\left(x, t\right)$, $i = 1, ..., 6$.

Um algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem para resolver a EDO de primeira ordem (1) é dado por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

em que

$$k_1 = f\left(x_n, y_n\right)\ ,\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)\ ,\ k_4 = f\left(x_n + h, y_n + hk_3\right)\ .$$

Escreva uma rotina no Scilab que implementa o método acima ao sistema (5). Sua rotina deve receber como parâmetros um vetor y_n, o espaçamento h e o vetor f cujas componentes são as funções $f_i\left(x, y\right)$ (você pode definir o vetor f como uma função do Scilab, e invocá-la ao executar o Runge-Kutta:

Algoritmo 2 esquema para implementar o método de Runge-Kutta de quarta ordem

```
function [ylinha]=fvec(y)
        xlinha(1)= f1(y(1),y(2),...,y(6))
        xlinha(2)= f2(y(1),y(2),...,y(6))
        ...
        xlinha(6)= f6(y(1),y(2),...,y(6))
endfunction

Agora execute:
-->RUNGE4(yn,h,fvec)
```

Vamos resolver a EDO (4) com as condições iniciais $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 4$. Verifique que com a escolha $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ temos $z(t) = \dot{z}(t) = 0$ para todo t (a trajetória do planeta é uma curva plana).

Lembrando que a unidade de tempo adotada é o ano, utilize um espaçamento h adequado (por exemplo, $h = 1/365$) para plotar a trajetória do corpo material sob o campo gravitacional do Sol com as condições iniciais dadas. Escreva uma rotina que calcula as posições coordenadas (x_i, y_i, z_i) do corpo material de acordo com o método de Runge-Kutta que você implementou. Ao final, sua rotina deve usar esses dados para plotar um gráfico $y \times x$. Para obter a forma correta da elipse resultante, utilize a função $square()$ após a função $plot()$ para que as escalas nos dois eixos sejam isométricas.

Encontre qual deve ser a velocidade inicial $\dot{y}(0)$ para que com 365 iterações de Runge-Kutta com espaçamento $h = 1/365$ a órbita se feche . Compare o valor que você encontrou com a velocidade orbital média da Terra, $107.200 km/h$, sabendo que $1u.a. = 149.60 \times 10^6 km$.