Terceira lista de Cálculo Numérico
parte A
Primeiro trimestre de 2012
Rodrigo Fresneda

March 15, 2012

1. Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 &= 3 \end{aligned}$$

   por a)Decomposição LU b)Eliminação Gaussiana. Calcule o determinante da matriz de coeficientes por meio das decomposições.

2. Usando Eliminação Gaussiana, verifique que o sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 &= 3 \\ \alpha x_3 + 3x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

   (a) possui uma única solução quando $\alpha = 0$
   (b) possui infinitas soluções quando $\alpha = 1$ e
   (c) não tem solução quando $\alpha = -1$.

3. Para uma matriz de coeficientes genérica A de ordem 3,

   (a) verifique que o método de eliminação Gaussiana sem pivotamento produz um sistema da forma
$$A^{(3)}x = b^{(3)} ,$$
   em que $A^{(3)}$é uma matriz triangular superior. Encontre os coeficientes de $A^{(3)}$ e $b^{(3)}$ como funções dos coeficientes de A e de b.
   (b) Encontre a matriz M tal que $A^{(3)} = MA$
   (c) Verifique que uma decomposição LU de A é dada por $A = M^{-1}A^{(2)}$, relacionando os componentes de L e de U com aqueles de M^{-1} e de $A^{(2)}$, respectivamente.

(d) A partir do item (c), verifique que as condições necessárias para que a eliminação Gaussiana possa ser feita sem pivoteamento são as mesmas para a existência da decomposição LU.

4. Seja A uma matriz de ordem n decomponível em LU. Sejam $\det A_i$, $i = 1, .., n$, seus menores principais. Mostre que
$$u_{ii} = \frac{\det A_i}{\det A_{i-1}}\ ,\ i = 1, 2, ..., n$$
(assuma $\det A_0 = 1$).

5. Mostre que se A é uma matriz positiva definida, então $A = LDL^T$, em que L é uma matriz triangular inferior e D é uma matriz diagonal positiva.

6. Utilize o resultado anterior para mostrar que uma matriz positiva-definida pode ser decomposta na forma $A = LL^T$, em que L é uma matriz triangular com elementos diagonais positivos.

7. Mostre que se o sistema linear $Ax = b$, $\det A \neq 0$, é transformado no sistema $Bx = c$, com $B = A^T A$ e $c = A^T b$, então a matriz B pode ser decomposta em $B = LL^T$ como no exercício anterior. Aplique este procedimento para resolver o sistema abaixo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. Considere o sistema linear
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

(a) Resolva-a o pelo método de eliminação Gaussiana com pivotamento parcial, trabalhando com arredondamento para dois dígitos significativos em cada operação.

(b) Refine a solução obtida em a) utilizado o procedimento iterativo de refinamento.

9. Seja A uma matriz de ordem n. Podemos encontrar A^{-1}, a inversa de A, resolvendo o conjunto de sistemas lineares
$$Ax^{(i)} = e^{(i)},\ i = 1, ..., n\,,$$
em que os vetores $e^{(i)}$ são as colunas da matriz identidade de ordem n e os vetores $x^{(i)}$ são as colunas de A^{-1}. Utilizando decomposição LU, inverta a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Resolva o sistema abaixo utilizando eliminação Gaussiana

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ao final, escreva a matriz triangular obtida $A^{(3)}$ em termos do produto $A^{(3)} = MA$, isto é, determine M.