

Terceira lista de Cálculo Numérico
Primeiro trimestre de 2012
parte B
Rodrigo Fresneda

21 de março de 2012

1. Dado o sistema linear

$$\begin{aligned}10x_1 + x_2 - x_3 &= 10 \\2x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 20 \\7x_1 + x_2 + 10x_3 &= 30\end{aligned}$$

- (a) Verificar a possibilidade de aplicação do método de Jacobi. Justifique.
(b) Se possível, resolvê-lo pelo método de Jacobi obtendo um resultado com erro relativo $\varepsilon < 10^{-2}$ na norma do máximo.

2. Mostre que se a matriz de coeficientes A é estritamente diagonal dominante, o critério de Sassenfeld é satisfeito, i.e., $\beta_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, em que

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

3. Dado o sistema linear

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 + 6x_3 &= 1 \\4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\-x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3\end{aligned}$$

mostre que é possível reordenar as equações acima (trocando linhas) de modo a fazer com que o critério de Sassenfeld seja satisfeito.

4. Dado o sistema linear

$$\begin{aligned}5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\-x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \\2x_1 - 3x_2 + 10x_3 &= -1\end{aligned}$$

- (a) Verifique a possibilidade de aplicação do método de Gauss-Seidel.
(b) Se possível, resolvê-lo pelo método de Gauss-Seidel com erro relativo $\varepsilon < 10^{-2}$ na norma do máximo.

5. Supomos que o sistema linear

$$\begin{aligned}x_1 - \alpha x_2 &= c_1 \\ -\alpha x_1 + x_2 - \alpha x_3 &= c_2 \\ -\alpha x_2 + x_3 &= c_3\end{aligned}$$

seja resolvido iterativamente pelas fórmulas

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \alpha x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} &= \alpha \left(x_1^{(k)} + x_3^{(k)} \right) + c_2 \\ x_3^{(k+1)} &= \alpha x_2^{(k)} + c_3\end{aligned}$$

Para que valores de α a convergência do método acima é garantida? Justifique.

6. Considere o sistema linear $Ax = b$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & 9 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Dos dois métodos iterativos, Jacobi e Gauss, qual deles você aplicaria, por quê? Resolva-o pelo método escolhido com $\varepsilon < 10^{-2}$ na norma do máximo.

7. Prove que o método de Jacobi para sistemas de segunda ordem sempre converge se a matriz de coeficientes é positiva-definida.