Quarta lista de Cálculo Numérico
Primeiro trimestre de 2012
Rodrigo Fresneda

1. Encontre o polinômio de grau 2 que aproxima a função $\frac{1}{x+4}$ no intervalo $[-1, 1]$ utilizando o produto escalar natural em $C[-1, 1]$.

2. Seja $f(x) = \left(x^3 - 1\right)^2$, $x \in [0, 1]$. Usando o método dos mínimos quadrados, aproximar a função $f(x)$ por

   (a) uma reta

   (b) um polinômio do segundo grau

   utilizando o produto escalar natural em $C[0, 1]$.

3. Aproximar, pelo método dos mínimos quadrados, a função $f(x) = x^3 + 4$ no intervalo $[0, 1]$ por

   (a) uma reta

   (b) um polinômio do segundo grau

   usando polinômios ortonormais.

4. Determinar a parábola mais próxima dos pontos (x_i, y_i) dados na tabela

x	-3	-1	1	2	3
y	-1	0	1	1	-1

   usando o método dos mínimos quadrados.

5. Ajuste um polinômio de grau 2 ao conjunto de pontos dados na tabela abaixo

x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	7

6. Considere o seguinte produto escalar em $\mathcal{P}_n$:

$$(p, q) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i)\, q(x_i) \ ,$$

   em que $x_0, ..., x_n$ são números distintos. Utilize esse produto escalar para refazer as questões 4 e 5.

7. Dada a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
e^{3x}	1	1.3499	1.8221	2.4596	3.3201

obtenha o valor de $f(x) = xe^{3x}$ no ponto 0.26 utilizando a fórmula de Lagrange de um polinômio interpolador do segundo grau. Estime o erro por meio da fórmula

$$|E(x)| \leq \frac{1}{3!} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \max_{t \in (x_0, x_2)} f^{(3)}(t) \ , \ x_0 < x_1 < x_2$$

e compare-o com o erro obtido na interpolação.

8. Considere a tabela

x	-2	-1	1	2
y	1	-3	1	9

.

   (a) Pelo método dos mínimos quadrados, ajuste à tabela as funções:

$$g_1(x) = ax^2 + bx \ , \ g_2(x) = cx^2 + d$$

   (b) Qual das funções fornece o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados? Justifique.

9. Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função $f(x) = 3x^6 - x^4$ no intervalo $[-1, 1]$ por uma parábola, usando polinômios de Legendre:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n \ , \ L_0(x) = 1 \, ,$$

que são ortogonais segundo o produto escalar

$$(L_i, L_j) = \int_{-1}^{1} L_i(x) L_j(x) \, dx$$

e satisfazem

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x) \, dx = \frac{2}{2n+1}$$

10. Sabendo-se que $\sqrt{1.03} = 1.0149$ e $\sqrt{1.04} = 1.0198$:

   (a) calcular $\sqrt{1.035}$, usando interpolação linear.

   (b) dar um limitante superior para o erro de truncamento.

11. A integral elíptica completa é definida por:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\left(1 - k^2 \sin^2 x\right)^{1/2}}$$

Por uma tabela de valores dessa integral, encontramos:

$$K(1) = 1.5708 \, , \ K(2) = 1.5719 \, , \ K(3) = 1.5739$$

Determinar $K(2.5)$ usando um polinômio de interpolação na forma de Lagrange sobre todos os pontos.

12. Um polinômio $P_n(x)$ de grau n coincide com e^x nos pontos $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Qual o menor valor de n que devemos tomar a fim de que se tenha:

$$|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6} \text{ para } 0 \leq x \leq 1?$$

13. Se $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ são $n+1$ pontos distintos, mostre que os $m+1$ vetores

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, ..., u_m = \begin{pmatrix} x_0^m \\ x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix},$$

com $m \leq n$, são linearmente independentes.

14. Se $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ são $n+1$ números distintos e $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ são $n+1$ valores de uma função, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, ..., n$, mostre que as equações normais podem ser escritas na forma

$$\left(X^T X\right) a = X^T y\,,$$

em que

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix},\ m < n\,.$$

15. Demonstre. Sejam $e_1 e_2, ..., e_n$ um conjunto ortonormal num espaço vetorial V com produto interno, e seja $y \in V$ qualquer. Então

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n} (y, e_i)\, e_i \right\| \leq \left\| y - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|$$

para quaisquer $a_1, ..., a_n$.

16. Mostre que há um único polinômio p de grau n ou menor tal que $p(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$, em que $x_0, ..., x_n$ são $n+1$ números distintos e $y_0, y_1, ..., y_n$ são quaisquer.

17. Mostre que se $m = n$ na questão 14, então o polinômio p de grau n cujos coeficientes são os $a_0, ..., a_n$ é o polinômio interpolador dos pontos (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$.