# Lista 1 - Cálculo Numérico - Zeros de funções

**1.2)** De acordo com o teorema de Bolzano, se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a, b]$, isto é se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. A função em questão é claramente contínua em todo seu domínio pois envolve apenas funções trigonométricas e funções polinomiais. Como $f(-1) = -0.0542 < 0$ e $f(0) = 0.0177 > 0$, concluimos que existe um zero para a função no intervalo $(-1, 0)$. Analogamente, como $f(1) = -0.0511 < 0$ e $f(0) = 0.0177 > 0$, concluimos que existe um zero para a função no intervalo $(0, 1)$.

**1.4)** Sejam $f(x) = \sin(x) - 0.750$, $a = 0.80$, $b = 0.90$. Com simples cálculos encontramos $f(a) = -0.032644$ e $f(b) = 0.033324$. A primeira aproximação para o zero de $f(x)$ pelo método da falsa posição é portanto $x_0 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = 0.849485$. Como $f(x_0) = 0.00094 > 0$, repetimos o passo iterativo acima trocando $b$ por $x_0$. Fazendo $a = 0.80$, $b = 0.849485$, obtemos $x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = 0.8481$. Como $f(x_1) = 0.0000251 > 0$, repetimos o passo iterativo acima mais uma vez, trocando agora $b$ por $x_1$. Fazendo $a = 0.80$, $b = 0.8481$, obtemos $x_2 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = 0.84806$. Como as três primeiras casas decimais de $x_1$ e $x_2$ são iguais, interrompemos o processo iterativo por já termos atingido a precisão desejada. A raiz da equação $\sin(x) - 0.750 = 0$, com precisão de 3 casas decimais, é portanto $x = 0.848$.

**1.6)** Para $\delta = 0.1$ temos que $f(x) = 0.1$ se $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $f(x) = -1 + 4.4x - 4.4x^2$ se $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Tomando $a = 0$ e $b = 1$, como no item 1.5.a, temos $f(a) = 0.1$ e $f(b) = -1$. Assim, a primeira aproximação para a raiz de $f$ é $x_0 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = 0.0909091$. Como $f(x_0) = 0.1$, fazemos $a = x_0$ e $b = 1$, obtendo assim a segunda aproximação $x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = 0.173554$. Como $f(x_1) = 0.1$, fazemos $a = x_1$ e $b = 1$, obtendo assim a terceira aproximação $x_2 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = 0.248685$. Como $f(x_2) = 0.1$, fazemos $a = x_2$ e $b = 1$, obtendo assim a quarta aproximação $x_3 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = 0.316987$. Como $f(x_3) = 0.1$, fazemos $a = x_3$ e $b = 1$, obtendo assim a quinta aproximação $x_4 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = 0.379079$.
**Obs:** Pelo resultado do ex. 1.5.b, esses valores de $x_n$ podem ser obtidos diretamente a partir da expressão $x_n = 1 - \frac{1}{(1.1)^{n+1}}$.

**1.8)** a) Como $f$ é função contínua em $[-1, -1/2]$, $f(-1) = 0.392699 > 0$ e $f(-0.5) = -0.0961796 < 0$, concluimos pelo Teorema de Bolzano que $f$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $(-1, -1/2)$. A dificuldade é mostrar que a raiz é única. Para isso, vamos usar a sugestão dada e o fato de que $\frac{d}{dx}(\text{arctg } x) = \frac{1}{1+x^2}$. Assim, temos que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x}{1+x^4} = \frac{x^4+3x^3+3x+1}{(1+x^2)(1+x^4)}$. Ou seja, $f'(x) = 0$ é equivalente a $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x + 1 = 0$. Logo, $p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 3$ e $p''(x) = 12x^2 + 18x = 6x(2x + 3)$. Analisando o sinal de $p''(x)$, descobrimos que $p'(x)$ é crescente se $x < -3/2$ ou se $x > 0$, e $p'(x)$ é decrescente se $-3/2 < x < 0$. Em particular, como $p'(-0.5) = 4.75 > 0$ e $p'(x)$ é decrescente em $[-1, -1/2]$, concluimos que $p'(x) > 0$ em $[-1, -1/2]$. Ou seja, $p(x)$ é crescente em $[-1, -1/2]$. Como $p(-0.5) = -0.8125$ concluimos que $p(x) < 0$ em$[-1, -1/2]$. Como $f'(x) = \frac{p(x)}{(1+x^2)(1+x^4)}$, concluimos que $f'(x) < 0$ em $[-1, -1/2]$, ou seja, $f(x)$ é decrescente em $[-1, -1/2]$ e, portanto, não pode exitir mais de uma raiz nesse intervalo.

b) Fazemos $a = -1$, $b = -0.5$. Então, a primeira iteração do método nos dá $x_1 = \frac{a+b}{2} = -0.75$, com $f(x_1) = 0.125083$. Como $f(a) > 0$ e $f(x_1) > 0$, mantemos $b = -0.5$ e fazemos $a = x_1 = -0.75$. A segunda iteração nos dá então $x_2 = -0.625$, com $f(x_2) = -0.000001645$. Como $f(b) < 0$ e $f(x_2) < 0$, mantemos $a = -0.75$ e fazemos $b = x_2 = -0.625$. A terceira iteração nos dá então $x_3 = -0.6875$, com $f(x_3) = 0.0600141$. Como $f(x_3) > 0$, mantemos $b$ e fazemos $a = x_3$. A quarta iteração nos dá então $x_4 = -0.656250$, com $f(x_4) = 0.0292312$. Como $f(x_4) > 0$, mantemos $b$ e fazemos $a = x_4$. A quinta iteração nos dá então $x_5 = -0.640625$, com $f(x_5) = 0.0144035$.

c) Sejam $a_k$ e $b_k$ os extremos do intervalo na $k$-ésima iteração. Queremos encontrar $n$ que nos garanta que $|a_k - b_k| < \epsilon$, onde $\epsilon = 10^{-13}$, se $k \geq n$. Como $|x_k - \alpha| \leq |a_k - b_k|$, a condição anterior nos garante que $|x_k - \alpha| < \epsilon$ se $k \geq n$. Como $|a_k - b_k| = \frac{|a_0 - b_0|}{2^k}$, fazendo $|a_k - b_k| < \epsilon$, temos $\frac{|a_0-b_0|}{2^k} < \epsilon \Rightarrow 2^k > \frac{|a_0-b_0|}{\epsilon} \Rightarrow k \ln 2 > \ln(|a_0 - b_0|) - \ln \epsilon$. Substituindo $a_0 = -1$, $b_0 = -0.5$, $\epsilon = 10^{-13}$, encontramos $k > 42.1815$. Logo, o valor de $n$ pedido é $n = 43$.

**2.2)** É fácil ver que $\psi_1(1) = 1$, $\psi_2(1) = 1$ e $\psi_3(1) = 1$. Portanto, 1 é ponto fixo das três funções. Seja $I$ um intervalo em torno do ponto fixo 1. Seja $x_0 = 1.2$ a condição inicial a ser utilizada. Para se determinar qual das três funções deve ser utilizada, vamos analisar a convergência do processo iterativo gerado no método do ponto fixo. O primeiro critério para convergência é a função e sua derivada serem contínuas no inervalo $I$. Esse critério é satisfeito para todas as três funções em questão, independentemente do intervalo $I$ adotado. O segundo critério é que exista algum $M$ satisfazendo $|\psi'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in I$. Claramente $\psi_1$ não satisfaz esse critério pois $|\psi_1'(x)| = 2$. Para $\psi_2$ precisamos de $|\psi_2'(x)| = |2x - 2| < 1 \Rightarrow x \in (0.5, 1.5)$. Como $1 \in (0.5, 1.5)$ e $1.2 \in (0.5, 1.5)$, concluimos que $\psi_2$ é uma boa escolha. Para $\psi_3$ precisamos de $|\psi_3'(x)| = |2x - 3| < 1 \Rightarrow x \in (1, 2)$. Como $1 \notin (1, 2)$, não podemos garantir que $\psi_3$ é uma boa escolha. Usando então $\psi_2$ com $x_0 = 1.2$, temos $x_1 = \psi_2(x_0) = 1.04 \Rightarrow x_2 = \psi_2(x_1) = 1.0016 \Rightarrow x_3 = \psi_2(x_2) = 1.00000256 \Rightarrow x_4 = \psi_2(x_3) = \ldots$

**2.4)** Tomemos como ponto inicial $x_0 = 0.5$. Aplicando o método do ponto fixo para $\psi_1(x)$ encontramos $x_1 = \psi_1(x_0) = 0.09375$, $x_2 = \psi_1(x_1) = 0.226357$, $\ldots$, $x_9 = \psi_1(x_8) = 0.198433$, $x_{10} = \psi_1(x_9) = 0.198438$, $\ldots$ Por outro lado, usando $\psi_2(x)$ encontramos $x_1 = \psi_2(x_0) = 0.175$, $x_2 = \psi_2(x_1) = 0.198928$, $x_3 = \psi_2(x_2) = 0.198426$, $x_4 = \psi_2(x_3) = 0.198437$, $x_5 = \psi_2(x_4) = 0.198437$, $\ldots$
Observa-se que a convergência é mais rápida para $\psi_2$ do que para $\psi_1$. De fato, a convergência é mais rápida quanto menor o valor de $|\psi'(\xi)|$, onde $\xi$ é a raiz. Para as funções em questão, temos $|\psi_1'(0.198437)| = 0.279533$ e $|\psi_2'(0.198437)| = 0.0236263$, justificando o fato de $\psi_2$ convergir mais rapidamente do que $\psi_1$.

**2.6)** a) Observe que $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ se $x > 0$. Portanto $h(x)$ é crescente em $(0, +\infty)$. Como $\lim h(x) = -\infty$ para $x \to 0^+$ e $\lim h(x) = +\infty$ para $x \to +\infty$, juntamente com o fato de $h(x)$ ser contínua, concluimos que que $h(x)$ assume todos os valores reais (exatamente uma única vez cada) no intervalo $(0, +\infty)$. Em particular, concluimos que existe um único $\xi \in (0, +\infty)$ tal que $h(\xi) = 0$.

b) Observe que $h(1) = 1$ e que $h(0.01) = -4.59517$. Como $h$ é contínua concluimos que $\xi \in (0.01, 1)$. Para avaliar a convergência do método do ponto fixo, vamos calcular a derivada a função de iteração em cada caso. Temos $|\psi_1'(x)| = \frac{1}{x}$. Como não vale $|\psi_1'(x)| < 1$ para

$x \in (0.01, 1)$ não podemos garantir a convergência para $\psi_1$. Temos $|\psi_2'(x)| = e^{-x} < 1$ para $x \in (0.01, 1)$ e $|\psi_3'(x)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-x}| < 1$ para $x \in (0.01, 1)$. Logo, com uma condição inicial $x_0 \in (0.01, 1)$ podemos usar tanto $\psi_2$ como $\psi_3$ no método do ponto fixo. Para descobrir qual tem uma convergência mais rápida, precisamos descobrir qual é o menor número entre $|\psi_2'(\xi)|$ e $|\psi_3'(\xi)|$. Como $\xi > 0$, temos $|\psi_2'(\xi)| < |\psi_3'(\xi)| \Rightarrow e^{-\xi} < \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\xi}\right) \Rightarrow e^{\xi} > 3 > e^1 \Rightarrow \xi > 1$. Mas isso é claramente falso, pois já provamos que $\xi(0.01, 1)$. Logo, concluimos que $|\psi_2'(\xi)| > |\psi_3'(\xi)|$ é falso. Assim, temos que $|\psi_2'(\xi)| > |\psi_3'(\xi)|$ e, portanto, a convergência é mais rápida para $\psi_3$ do que para $\psi_2$.

c) Tomemos como ponto inicial $x_0 = 0.1$. Aplicando o método do ponto fixo para $\psi_3(x)$ encontramos $x_1 = \psi_3(x_0) = 0.502419$, $x_2 = \psi_3(x_1) = 0.553742$, $x_3 = \psi_3(x_2) = 0.564268$, $x_4 = \psi_3(x_3) = 0.566522$, $x_5 = \psi_3(x_4) = 0.567009$.

d) Temos que $|\psi_3'(x)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-x}| < \frac{1}{2}$ se $x \in (0.01, 1)$. Seja $M = 1/2$. Pelo Teorema do Valor Médio, sabemos que existe $c_0$ entre $x_0$ e $\xi$ tal que $|\psi_3'(c_0)| = \frac{|\psi_3(x_0) - \psi_3(\xi)|}{|x_0 - \xi|} = \frac{|x_1 - \xi|}{|x_0 - \xi|}$, ou seja $|x_1 - \xi| = |\psi_3'(c_0)||x_0 - \xi|$. Analogamente, existe $c_1$ entre $x_1$ e $\xi$ tal que $|x_2 - \xi| = |\psi_3'(c_2)||x_1 - \xi|$ e, portanto, $|x_2 - \xi| = |\psi_3'(c_1)||\psi_3'(c_2)||x_0 - \xi|$. Prosseguindo dessa maneira, encontramos que $|x_k - \xi| = |\psi_3'(c_1)||\psi_3'(c_2)| \ldots |\psi_3'(c_k)||x_0 - \xi|$. No exercício em questão, conseguimos garantir que $|\psi_3'(c_i)| < M = 1/2$ e, portanto, $|x_k - \xi| < M^k |x_0 - \xi|$. Para que garantirmos uma precisão *epsilon* precisamos exigir que $M^k |x_0 - \xi| > \epsilon \Rightarrow k \ln M > \ln \epsilon - \ln |x_0 - \xi|$. Substituindo $M = 1/2$, $\epsilon = 10^{-7}$, $x_0 = 0.1$ e $\xi = 0.567$, encontramos $k > 22.155$. Portanto, com essa análise, podemos garantir a precisão desejada a partir de 23 iterações (observe que, na prática, pode ser que essa precisão seja atingida com menos iterações - o que podemos afirmar com certeza é que após 23 iterações certamente teremos uma precisão de pelo menos $10^{-7}$).

**2.8)** Seja $\xi$ uma das raízes.

a) Para garantir convergência, queremos encontrar um intervalo $I$ e um número $M$ tais que $\xi \in I$ e $|G'(x)| \leq M < 1$ se $x \in I$. Observe que $|G'(x)| = \left|\frac{2x}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 3/2$. Portanto, para a raiz $\xi = 2$ é impossível encontrar o intervalo I. Já para a raiz $\xi = 1$, podemos tomar qualquer intervalo do tipo $I = [\alpha, \beta]$, com $1 < \beta < 3/2$ e $-3/2 < \alpha < 1$.

b) Para garantir convergência, queremos encontrar um intervalo $I$ e um número $M$ tais que $\xi \in I$ e $|G'(x)| \leq M < 1$ se $x \in I$. Observe que $|G'(x)| = \left|\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\right| < 1 \Rightarrow \sqrt{3x-2} > 3/2 \Rightarrow 3x - 2 > 9/4 \Rightarrow x > 17/12$. Portanto, para a raiz $\xi = 1$ é impossível encontrar o intervalo I. Já para a raiz $\xi = 2$, podemos tomar qualquer intervalo do tipo $I = [\alpha, \beta]$, com $2 < \beta$ e $17/12 < \alpha < 2$.

**2.10)** a) Seja $f(x) = x^3 - x - 1$. Observe que, além de ser contínua, $f(1.3) = -0.103 < 0$ e $f(1.4) = 0.344 > 0$. Portanto, pelo teorema de Bolzano, existe pelo menos uma raiz de $f$ em $(1.3, 1.4)$. Para mostrar que essa rauz é a única nesse intervalo, vamos analisar o sinal de $f'(x) = 3x^2 - 1$. É fácil ver que $f'(x) > 0$ se $x \in (1.3, 1.4)$. Ou seja, $f$ é crescente em $(1.3, 1.4)$ e, portanto, a raiz é única nesse intervalo.

b) Aplicando o método encontramos: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0.75$, $x_3 = 3.11111$, $x_4 = 0.424745$, $x_5 = 7.89734$, $x_6 = 0.142659$, $x_7 = 56.1461$, $x_8 = 0.0181279$, $x_9 = 3098.18$, $x_{10} = 0.000322874$.

c) A primeira parte é demonstrada facilmente a partir da definição de $\phi$. Dizemos que $\phi$ é uma contração em $[a,b]$ se existe $0 \leq M < 1$ tal que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq M|x-y|$ para todos $x, y \in M$. Suponha, por absurdo, que $\phi$ é uma contração num intervalo $[a,b]$ com $\alpha \in [a,b]$. Logo, $|\frac{1}{xy} + \frac{x+y}{x^2y^2}| < 1$ para todos $x, y \in [a,b]$. Tome $x$ e $y$ arbitrariamente próximos de $\alpha$. Fazendo $x = \alpha + \epsilon$ e $y = \alpha - \epsilon$ temos que $\left|\frac{1}{(\alpha+\epsilon)(\alpha-\epsilon)} + \frac{2\alpha}{(\alpha+\epsilon)^2(\alpha-\epsilon)^2}\right| < 1$. Tomando $\epsilon$ arbitrariamente pequeno, temos que $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \leq 1 \Rightarrow \alpha + 2 \leq \alpha^3$. Como $\alpha$ é raiz da equação, vale que $\alpha^3 = \alpha + 1$ e, portanto, $\alpha + 2 \leq \alpha + 1 \Rightarrow 2 \leq 1$. Chegamos a um absurdo. A conclusão é que a hipótese de $\phi$ ser uma contração é falsa.

d) Temos que $\phi''(x) = \frac{2(3-x)}{x^4}$ e, portanto, $\phi''(x) > 0$ se $x \in [1.3, 1.4]$. Logo, $\phi'(x)$ é crescente em $[1.3, 1.4]$. Consequentemente, no intervalo $[1.3, 1.4]$ o maior valor possível para $\phi'$ é $\phi'(1.4) = -1.239$, ou seja, $\phi'(x) < -1.24$ se $x \in [1.3, 1.4]$. Portanto, $|\phi'(x)| > 1.24$ se $x \in [1.3, 1.4]$.

e) Usando o Teorema do Valor Médio, dado $x_n \in [1.3, 1.4]$, com $x_n \, neq \alpha$, existe $\xi$ entre $x_n$ e $\alpha$ tal que $\phi'(\xi) = \frac{\phi(x_n) - \phi(\alpha)}{x_n - \alpha} \Rightarrow |\phi(x_n) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\xi)||x_n - \alpha| > 1.24|x_n - \alpha|$, onde utilizamos o resultado do item d. No método do ponto fixo, $\phi(x_n) = x_{n+1}$ e $\phi(\alpha) = \alpha$ (já que $\alpha$ é o ponto fixo) e, portanto, $|x_{n+1} - \alpha| > 1.24|x_n - \alpha|$.

f) Suponha, por absurdo, que a sequência definida por um dado $x_0$ e por $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge para a raiz $\alpha$. Logo, existe um $n_0$ tal que $x_n \in (1.3, 1.4)$ sempre que $n \geq n_0$. Repetindo o raciocínio do item e, podemos mostrar que $|x_{n_0+k} - \alpha| > (1.24)^k |x_{n_0} - \alpha|$. Para $k$ suficientemente grande, temos $x_{n_0+k} \notin (1.3, 1.4)$, contrariando a hipótese de convergência da sequência.

**3.1)** Seja $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Tome um intervalo $[a,b]$ de forma que $a < 0$ é um número negativo arbitrariamente grande e $b > 0$ é um número positivo arbitrariamente grande. É fácil ver que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ pois $x^3$ é o termo dominante em $f(x)$ quando $|x| \gg 1$. Além disso, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ para qualquer $x$, ou seja $f$ é sempre crescente. Assim, concluimos que $f(x)$ possui uma, e apenas uma, raiz real. Tomando, por exemplo, $x_0 = 2$, encontramos: $x_1 = 1.21429$, $x_2 = 0.713151$, $x_3 = 0.489369$, $x_4 = 0.454079$, $x_5 = 0.453398$, $x_6 = 0.453398$. Ou seja, com duas casas decimais, a raiz é 0.45.
Para $g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$, usando o método de Newton-Raphson com $x_0 = 1.9$, encontramos $x_1 = -15.2261$, $x_2 = -9.99927$, $x_3 = -6.55739$, $x_4 = -4.33512$, $x_5 = -2.97692$, $x_6 = -2.26764$, $x_7 = -2.02844$, $x_8 = -2.00037$.

**3.3)** a) Seja $f(x) = \frac{x}{2} - \text{tg}(x)$. Temos $f'(x) = \frac{1}{2} - \sec^2(x)$. Tomando $x_0 = 4$ e aplicando o método de Newton, encontramos $x_1 = 4.45757$, $x_2 = 4.3519$, $x_3 = 4.28863$, $x_4 = 4.27523$, $x_5 = 4.27478$. Ou seja, a raiz encontrada é 4.27. [Observe que $x = 0$ também é solução, porém não é a menor solução positiva.]

b) Seja $f(x) = 2\cos x - \frac{e^x}{2}$. Temos $f'(x) = 2\text{sen}\, x - \frac{e^x}{2}$. Tomando $x_0 = 0$ e aplicando o método de Newton, encontramos $x_1 = 3$, $x_2 = 1.83557$, $x_3 = 1.11336$, $x_4 = 0.920701$, $x_5 = 0.904898$, $x_6 = 0.904788$. Ou seja, a raiz encontrada é 0.90.

c) Seja $f(x) = x^5 - 6$. Temos $f'(x) = 5x^4$. Tomando $x_0 = 1$ e aplicando o método de Newton, encontramos $x_1 = 2$, $x_2 = 1.675$, $x_3 = 1.49245$, $x_4 = 1.43583$, $x_5 = 1.431$, $x_6 = 1.43097$. Ou seja, a raiz encontrada é 1.43.

**3.5)** Temos que $f(-10) < 0$ e $f(10) > 0$. Além disso, $f'(x) = 3x^2 - 8$ e, portanto, $f$ é crescente se $x < -2\sqrt{2/3}$, decescente se $-2\sqrt{2/3} < x < 2\sqrt{2/3}$, e crescente se $x > 2\sqrt{2/3}$. Calculando os máximos/mínimos locais, temos $f(-2\sqrt{2/3}) = 13.7$ e $f(2\sqrt{2/3}) = -3.7$. Como $f$ é contínua, concluimos pelo teorema de Bolzano que existe uma raiz no intervalo $(-10, -2\sqrt{2/3})$, uma raiz no intervalo $(-2\sqrt{2/3}, 2\sqrt{2/3})$, e uma raiz no intervalo $(2\sqrt{2/3}, 10)$.
Tomando $x_0 = 0.1$ e aplicando o método de Newton, encontramos $x_1 = 0.627102$, $x_2 = 0.660795$, $x_3 = 0.66112$, $x_4 = 0.66112$. Ou seja, a raiz encontrada é 0.66.

**3.7)** Fazendo os gráficos de $y = 2 \operatorname{sen} x$ e de $y = x$ é fácil perceber que existem duas raízes, uma no intervalo $(\pi/2, \pi)$ e outra no intervalo $(-\pi, -\pi/2)$. Tomando $x_0 = -0.8971$ e aplicando o método de Newton, encontramos $x_1 = 1.79077$, $x_2 = 1.90288$, $x_3 = 1.89553$, $x_4 = 1.89549$. Ou seja, a raiz encontrada é 1.895. Apesar do chute inicial $x_0$ estar mais próximo da raiz negativa, o método de Newton-Raphson convergiu para a solução positiva nesse caso.

**3.9)** Vamos utilizar o método da secante para $f(x) = x - \operatorname{tg}(x)$. Como $f(4) = 2.842$ e $f(4.5) = -0.137$, podemos garantir a existência de uma raiz em $(4, 4.5)$. Fazendo $x_{k+1} = \phi(x_k) = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$, e usando $x_0 = 4$ e $x_1 = 4.5$ como valores iniciais, encontramos $x_2 = 4.47695$, $x_3 = 4.4929$, $x_4 = 4.49345$, $x_5 = 4.49341$, $x_6 = 4.47695$, $x_7 = 4.4929$, $x_8 = 4.49345$, $x_9 = 4.49341$, $x_{10} = 4.49341$. Ou seja, a raiz encontrada é 4.493.