UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

BC1419 Cálculo Numérico (3º 2018) - LISTA 3 - Aproximação de funções

Resolução

1. Mínimos Quadrados discreto

1) Aproximando a função f(x) ≈P_2(x)= a_0+a_1x+a_2x^2. Temos:

a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2, sendo u_0=1, u_1=x e $u_2 = x^2$

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad u_2 = u_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \langle u_0,u_0\rangle & \langle u_0,u_1\rangle & \langle u_0,u_2\rangle \\ \langle u_1,u_0\rangle & \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle \\ \langle u_2,u_0\rangle & \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y,u_0\rangle \\ \langle y,u_1\rangle \\ \langle y,u_2\rangle \end{bmatrix}, \tag{1}$$

Assim, encontramos os seguintes sistemas:

u_0, u_0 = 1*1 + 1*1 + 1*1 + 1*1 = 4 u_1, u_0 =-1*1 + 1*0 + 1*1 + 2*1= 2
u_0, u_1 = -1*1 + 1*0 + 1*1 + 1*2 = 2 u_1, u_1= -1*-1 + 0*0 + 1*1 + 2*2 = 6
u_0, u_2 = 1*1 + 1*0 + 1*1 + 1*4 = 6 u_1, u_2 = -1*1 + 0*0 + 1*1 + 2*4 =8
u_2, u_0 = 1*0 + 1*-1 + 1*0 + 7*1 = 6 y, u_0= 0 - 1 + 0 + 7= 6
u_2, u_1= -1*1 + 0*0 + 1*1 + 2*4=8 y, u_1= 0 + 0 + 0 + 14= 14
u_2, u_2 = 1*1 + 0*0 + 1*1 + 4*4 =18 y, u_2= 0 + 0 + 0 +28 = 28

Resulta nas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 28 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

Resolvendo o sistema:

$$\alpha_0 \approx -1.6; \quad \alpha_1 \approx 0.2 \quad \text{e} \quad \alpha_2 \approx 2.$$

2) Aproximando pela reta mais próxima: y = a_1x + a_0.

$$u_0{=}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\ u_1{=}\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\2\end{bmatrix}\ y{=}\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\langle u_0,u_0\rangle & \langle u_0,u_1\rangle\\ \langle u_1,u_0\rangle & \langle u_1,u_1\rangle\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle y,u_0\rangle\\ \langle y,u_1\rangle\\ \langle y,u_2\rangle\end{bmatrix},\tag{3}$$

Assim, encontramos os seguintes sistemas:

u_0, u_0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1= 5 u_1, u_0 = -2 + 0 -1 + 1 + 2 = 0
u_0, u_1 = -2 - 1 + 0 + 1 + 2= 0 u_1, u_1= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 =1 0
y, u_0= 0 + 0 - 1 + 0 + 7= 6 y, u_1= 0 + 0 + 0 + 14= 14

Resulta nas matrizes:

$$\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 14\end{bmatrix},\tag{4}$$

Resolvendo o sistema:

$$\alpha_0\ \approx\ 1.2;\quad \alpha_1\ \approx\ 1.4$$

3) Utilizando a mesma metodologia e aproximando a função de uma parábola por: a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2, sendo u_0=1, u_1=x e $u_2 = x^2$. Temos:

$$u_0{=}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\ u_1{=}\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\2\\3\end{bmatrix}\ u_2{=}\ u_1^2{=}\begin{bmatrix}9\\1\\1\\4\\9\end{bmatrix}\ y{=}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\langle u_0,u_0\rangle & \langle u_0,u_1\rangle & \langle u_0,u_2\rangle\\ \langle u_1,u_0\rangle & \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle\\ \langle u_2,u_0\rangle & \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle y,u_0\rangle\\ \langle y,u_1\rangle\\ \langle y,u_2\rangle\end{bmatrix},\tag{5}$$

Assim, encontramos os seguintes sistemas:

$u_0, u_0 = 5$ $u_1, u_0 = 2$
$u_0, u_1 = 2$ $u_1, u_1 = 24$
$u_0, u_2 = 24$ $u_1, u_2 = 8$
$u_2, u_0 = 24$ $y, u_0 = 0$
$u_2, u_1 = 8$ $y, u_1 = 3$
$u_2, u_2 = 180$ $y, u_2 =$ -13

Resulta nas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 24 \\ 2 & 24 & 8 \\ 24 & 8 & 180 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -13 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

Resolvendo o sistema:

$$\alpha_0 \approx 0.903; \quad \alpha_1 \approx 0.1157 \quad \text{e} \quad \alpha_2 \approx -0.19776.$$

4) Construindo o gráfico com os pontos dados, percebemos que a função se assemelha a uma parábola, assim podemos aproximar a esse tipo de função.

$a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2$, sendo u_0=1, u_1=x e $u_2 = x^2$. Temos:

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \; u_2 = u_1^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \; y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \langle u_0, u_0 \rangle & \langle u_0, u_1 \rangle & \langle u_0, u_2 \rangle \\ \langle u_1, u_0 \rangle & \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle u_2, u_0 \rangle & \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, u_0 \rangle \\ \langle y, u_1 \rangle \\ \langle y, u_2 \rangle \end{bmatrix}, \tag{7}$$

Assim, encontramos os seguintes sistemas:

$u_0, u_0 = 5$ $u_1, u_0 = 0$
$u_0, u_1 = 0$ $u_1, u_1 = 10$
$u_0, u_2 = 10$ $u_1, u_2 = 0$

$u_2, u_0 = 0 \;\; y, u_0 = 14$
$u_2, u_1 = 0 \;\; y, u_1 = -5$
$u_2, u_2 = 34 \;\; y, u_2 = 45$

Resulta nas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 45 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

Resolvendo o sistema:

$$\alpha_0 \;\approx\; 0.3714; \quad \alpha_1 \;\approx -0.5 \quad \text{e} \quad \alpha_2 \;\approx\; 1.2143.$$

5) No caso de g_1, temos as funções: $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x$ e os coeficientes de mínimos quadrados a e b são a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, f_1 \rangle \\ \langle y, f_2 \rangle \end{bmatrix}.$$

Fazendo as contas (ver cálculos na planilha ex_8lista_3 no site), esse sistema é

$$\begin{bmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

e a solução é $a = \frac{38}{34}$ e $b = 2$. Para esses coeficientes, a soma dos resíduos quadráticos é (ver cálculos na planilha)

$$Res_2(a,b)[g_1] \;=\; \sum_{i=1}^{4} (y_i - [ax_i^2 + bx_i])^2 \;\approx\; 9.529.$$

Da mesma forma, para a função g_2, consideramos as funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = 1$. O sistema correspondente é

$$\begin{bmatrix} \langle 34 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

e a solução é $c = 2$ e $d = -3$. Para esses coeficientes, a soma dos resíduos quadráticos é (ver cálculos na planilha)

$$Res_2(c,d)[g_2] \;=\; \sum_{i=1}^{4} (y_i - [ax_i^2 + bx_i])^2 \;=\; 40.$$

Conclusão: Como o resíduo $Res_2(a,b)[g_1]$ é menor do que o resíduo $Res_2(c,d)[g_2]$, podemos dizer que a função g_1 produz um melhor ajuste, segundo o critério de minimizar a soma dos quadrados dos resíduos.

——-

6) No caso de g(t), temos as funções: $f_1(x) = t^2$, $f_2(x) = t$ $f_3(x) = 1$ e os coeficientes de mínimos quadrados α, β e γ são a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \langle f_1, f_3\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \langle f2, f3\rangle \\ \langle f_3, f1\rangle & \langle f_3, f_2\rangle & \langle f_3, f_3\rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, f_1\rangle \\ \langle y, f_2\rangle \\ \langle y, f_3\rangle \end{bmatrix}.$$

Fazendo as contas:

$$\begin{bmatrix} 140352 & 10368 & 816 \\ 10368 & 816 & 72 \\ 816 & 72 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29070.4 \\ 2195.6 \\ 180.2 \end{bmatrix}.$$

e a solução é $\alpha \approx -0.0485$, $\beta \approx 0.972$ e $\gamma \approx 0.136$

A aceleração da gravidade seria: $2 * (0.136cm/[1/60s]^2) = 2.712 * 10^{-3)}$ * 3600s $= 9.76m/s^2$

2. Mínimos Quadrados contínuo

1) Sejam $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ e $P_2(x) = x^2$. Segundo o método dos mínimos quadrados, os coeficientes do polinômio de grau menor ou igual a 2

$$p(x) \;=\; \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) \;=\; \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

que melhor aproxima a função $f(x) = \frac{1}{x+4}$ no intervalo $[-1, 1]$ são dados pela solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} \langle P_0, P_0\rangle & \langle P_0, P_1\rangle & \langle P_0, P_2\rangle \\ \langle P_1, P_0\rangle & \langle P_1, P_1\rangle & \langle P_1, P_2\rangle \\ \langle P_2, P_0\rangle & \langle P_2, P_1\rangle & \langle P_2, P_2\rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, P_0\rangle \\ \langle f, P_1\rangle \\ \langle f, P_2\rangle \end{bmatrix}, \tag{9}$$

onde $\langle P_i, P_j\rangle \;:=\; \int\limits_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)\,dx \qquad \langle f, P_i\rangle \;:=\; \int\limits_{-1}^{1} f(x)P_i(x)\,dx.$

Temos que

$$\langle P_0,P_0\rangle = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2; \qquad \langle P_0,P_1\rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0;$$

$$\langle P_0,P_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}; \quad \langle P_1,P_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3};$$

$$\langle P_1,P_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0; \quad \langle P_2,P_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{5};$$

e

$$\langle f,P_0\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+4}\,dx = \log(x+4)|_{-1}^{1} = \log(5/3);$$

$$\langle f,P_1\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x+4}\,dx = \int_{-1}^{1} 1-\frac{4}{x+4}dx = x-4\log(x+4)|_{-1}^{1} = -4\log(5/3);$$

$$\begin{aligned}\langle f,P_2\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x+4}\,dx = \int_{-1}^{1} (x-4)+\frac{16}{x+4}dx = \left.\frac{x^2}{2}-4x+16\log(x+4)\right|_{-1}^{1}\\ &= -8+16\log(5/3).\end{aligned}$$

O sistema (13) é, portanto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(5/3) \\ -4\log(5/3) \\ -8+16\log(5/3) \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema numericamente, obtemos

$$\alpha_0 \approx 0.24991; \quad \alpha_1 \approx -3.06495 \quad \text{e} \quad \alpha_2 \approx 0.01651.$$

2) (a) Sejam $P_0(x)=1, P_1(x)=x$. Segundo o método dos mínimos quadrados, os coeficientes do polinômio de grau menor ou igual a 1

$$p(x) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

que melhor aproxima a função $f(x)=(x^3-1)^2$ no intervalo $[0,1]$ são dados pela solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} \langle P_0,P_0\rangle & \langle P_0,P_1 \\ \langle P_1,P_0\rangle & \langle P_1,P_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f,P_0\rangle \\ \langle f,P_1\rangle \end{bmatrix}, \tag{10}$$

onde $\langle P_i,P_j\rangle := \int_0^1 P_i(x)P_j(x)\,dx \qquad \langle f,P_i\rangle := \int_0^1 f(x)P_i(x)\,dx.$

Temos que

$$\langle P_0,P_0\rangle = \int_0^1 1\,dx = 1; \qquad \langle P_0,P_1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$\langle P_1,P_1\rangle = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

e

$$\begin{aligned} \langle f, P_0\rangle &= \int_0^1 (x^3-1)^2\,dx = \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} + x\Big|_0^1 = \frac{9}{14}; \\ \langle f, P_1\rangle &= \int_0^1 x(x^3-1)^2\,dx = \frac{x^8}{8} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{9}{40}; \end{aligned}$$

O sistema (12) é, portanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{14} \\ \frac{9}{40} \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema numericamente, obtemos

$$\alpha_0 \approx 1.22142857142857 \quad \text{e} \quad \alpha_1 \approx -1.15714285714286.$$

(b) Utilizando os cálculos do item (a) e sabendo que, para $P_i(x) = x^{i-1}$,

$$\langle P_i, P_j\rangle = \int_0^1 P_i(x)P_j(x)\,dx = \int_0^1 x^{i-1}x^{j-1}\,dx = \frac{1}{i+j-1},$$

basta calcular

$$\langle f, P_2\rangle = \int_0^1 x^2(x^3-1)^2\,dx = \frac{x^9}{9} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{9};$$

Dessa forma, os coeficientes do polinômio de grau menor ou igual a 2

$$p(x) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

que melhor aproxima a função $f(x) = (x^3-1)^2$ no intervalo $[0,1]$ são dados pela solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{14} \\ \frac{9}{40} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema numericamente, obtemos

$$\alpha_0 \approx 1.0190476190476196; \quad \alpha_1 \approx 0.0571428571428536 \quad \text{e}$$
$$\alpha_2 \approx -1.2142857142857109.$$

3)

a. uma reta: p(x)= a_0P_0 + $a_1P_1(x)$= $a_0 + a_1(x)$
$P_0 = 1$ e $P_1 = x$.

$$\begin{bmatrix} \langle P_0, P_0\rangle & \langle P_0, P_1\rangle \\ \langle P_1, P_0\rangle & \langle P_1, P_1\rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, P_0\rangle \\ \langle f, P_1\rangle \end{bmatrix}, \tag{11}$$

Realizando as operações acima obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{4} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

Obtemos assim: $a_0 =\approx 3.8$, $a_1 \approx 0.9$

b. Um polinomio do segundo grau com polinomios ortonomais unitários.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Obtemos a seguinte euqação de aproximação: p(x)= 4.05 + 0.6x + 1.5 x^2, ou seja, $a_0 = 4.05$, $a_1 = 0.6$ e $a_2 = 1.5$.

4) Temos que os primeiros 3 polinômios de Legendre são

$$P_0(x) \;=\; 1; \quad P_1(x) \;=\; x \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Utilizando as propriedades dos polinômios de Legendre, temos que os coeficientes do polinômio de grau menor ou igual a 2

$$p(x) \;=\; \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x)$$

que melhor aproxima a função $f(x) = 3x^6 - x^4$ no intervalo $[-1, 1]$ são dados pela solução do sistema diagonal

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, P_0 \rangle \\ \langle f, P_1 \rangle \\ \langle f, P_2 \rangle \end{bmatrix}, \tag{13}$$

onde $\langle P_i, P_j \rangle \;:=\; \int\limits_{-1}^{1} P_i(x) P_j(x)\, dx \qquad \langle f, P_i \rangle \;:=\; \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_i(x)\, dx.$

Como, também,

$$\begin{aligned}
\langle f, P_0\rangle &= \int_{-1}^{1} 3x^6 - x^4\, dx = 3\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{35};\\
\langle f, P_1\rangle &= \int_{-1}^{1} x(3x^6 - x^4)\, dx = 3\frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6}\Big|_{-1}^{1} = 0;\\
\langle f, P_2\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2-1)(3x^6 - x^4)\, dx = \frac{1}{2}\left[9\frac{x^9}{9} - 6\frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5}\right]\Big|_{-1}^{1}\\
&= \frac{12}{35},
\end{aligned}$$

obtemos

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\times\frac{16}{35} = \frac{8}{35} \quad \alpha_1 = \frac{3}{2}\times 0 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{5}{2}\times\frac{12}{35} = \frac{6}{7}.$$

5) Utilizando os polinômios dados pelo exercício, devemos separar f(x) em 3 intervalos para calcular o polinômio que melhor aproxima a função. Começando pelo primeiro intervalo [0,2]:

$$\begin{bmatrix} \langle P_0,P_0\rangle & \langle P_0,P_1\rangle & \langle P_0,P_2\rangle & \langle P_0,P_3\rangle \\ \langle P_1,P_0\rangle & \langle P_1,P_1\rangle & \langle P_1,P_2\rangle & \langle P_1,P_3\rangle \\ \langle P_2,P_0\rangle & \langle P_2,P_1\rangle & \langle P_2,P_2\rangle & \langle P_2,P_3\rangle \\ \langle P_3,P_0\rangle & \langle P_3,P_1\rangle & \langle P_3,P_2\rangle & \langle P_3,P_3\rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f,P_0\rangle \\ \langle f,P_1\rangle \\ \langle f,P_2\rangle \\ \langle f,P_3\rangle \end{bmatrix}, \tag{14}$$

Resolvendo o sistema acima,btemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & \frac{2}{3} & 5 & 12 \\ 2 & 5 & \frac{2}{5} & \frac{55}{2} \\ 7 & 12 & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{-26}{15} \\ \frac{-10}{3} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

Os coeficientes deste intervalo, portanto, são: $a_0 \approx -1.655, a_1 \approx 0.659, a_2 \approx 0.0123, a_3 \approx -0.0064$

Para o segundo intervalo [2,3] obtemos um polinômio nulo, há que neste intervalo a função f(x) é 0. Partindo para o terceiro intervalo [3,4], obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 18 & \frac{833}{8} \\ \frac{7}{2} & \frac{2}{3} & \frac{511}{8} & 372 \\ 18 & \frac{511}{8} & \frac{2}{5} & \frac{15631}{8} \\ \frac{833}{8} & 372 & \frac{15631}{8} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{3} \\ \frac{175}{4} \\ \frac{3422}{15} \\ \frac{32095}{24} \end{bmatrix},$$

Assim, os coeficientes encontrados são: $a_0 \approx -11.3, a_1 \approx 3.374, a_2 \approx 0.625, a_3 \approx 0.107$

Somando os coeficientes encontrados para achar o polinômio que aproxima f(x) no intervalo [0,4], encontramos: $p(x) = -12.955 + 4.033x + 0.64x^2 + 0.1x^3$

b. Utilizando o seguinte sistema podemos encontrar o polinômio que melhor aproxima f(x):

$$\begin{bmatrix} \langle P_0,P_0\rangle & \langle P_0,P_1\rangle & \langle P_0,P_2\rangle \\ \langle P_1,P_0\rangle & \langle P_1,P_1\rangle & \langle P_1,P_2\rangle \\ \langle P_2,P_0\rangle & \langle P_2,P_1\rangle & \langle P_2,P_2\rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f,P_0\rangle \\ \langle f,P_1\rangle \\ \langle f,P_2\rangle \end{bmatrix},$$

Como consequencia obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix},$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos: $a_0 \approx 0.193, a_1 \approx 0.124, a_2 \approx 0.0065$

6) Utilizando os polinômios $p_0 = 1, p_1 = xep_2 = x^2$:

$$\begin{bmatrix} \langle P_0,P_0\rangle & \langle P_0,P_1\rangle & \langle P_0,P_2\rangle \\ \langle P_1,P_0\rangle & \langle P_1,P_1\rangle & \langle P_1,P_2\rangle \\ \langle P_2,P_0\rangle & \langle P_2,P_1\rangle & \langle P_2,P_2\rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f,P_0\rangle \\ \langle f,P_1\rangle \\ \langle f,P_2\rangle \end{bmatrix},$$

Obtendo assim:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{8}{3} \\ 2 & \frac{8}{3} & 4 \\ \frac{8}{3} & 2 & \frac{32}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{32}{5} \\ \frac{64}{6} \end{bmatrix},$$

Resolvendo o sistema acima podemos chegar nos coeficientes: $a_0 \approx 0.4, a_1 \approx -2.4, a_2 \approx 3$

7)

a. $\int\limits_{-1}^{1}$ [f(x) - g(x)]^2 dx $= \int\limits_{-1}^{0}$ [-x$^2 - \frac{3}{4}x]^2$ dx $+ \int\limits_{0}^{1}$[x$^2 - \frac{3}{4}x$] dx $= (\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^3}{16})|_{-1}^{0} + (\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^3}{16})|_0^1$ $= 0.$

Portanto, o polinomio escolhido é o de menor grau e o que melhor se aproxima da função f(x).

b. Devemos separar f(x) em duas partes: -x^2 no intervalo [-1,0] e x^2 no intervalo [0,1].

Utilizando os polinômios $P_0 = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x$, temos:
- Para -x^2:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{-2}{15} \\ \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

Obtemos os seguintes coeficientes:
$a_0 \approx 0.662, a_1 \approx 2.0, a_2 \approx -0.666, a_3 0$

- Para x^2:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{8} & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{2}{15} \\ \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

Assim obtemos os seguintes coeficientes:

$a_0 \approx -0.2726, a_1 \approx 1.2, a_2 \approx -0.1116, a_3 - 0.0445$

Somando os dois polinômios obtidos temos o seguinte polinômio resultante: $p(x) = 0.3894 + 3.2x - 0.776x^2 - 0.0445$