UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

BC1419 Cálculo Numérico - LISTA 1 - Zeros de Funções

(Profs. André Camargo, Feodor Pisnitchenko, Marijana Brtka, Rodrigo Fresneda)

1 Existência e unicidade de zeros; Métodos da bissecção e falsa posição

1. Dadas as equações

   (a) $f(x) = x^3 + 3x - 1 = 0$

   (b) $f(x) = x^2 - \sin x = 0$

   (c) $f(x) = x + e^x = 0$

   pesquisar a existência de raízes reais e isolá-las em intervalos. Para tanto, esboçe o gráfico dessas funções e utilize o teorema do anulamento.

2. Justifique que a função:

   $$f(x) = \cos \frac{\pi (x+1)}{8} + 0.148x - 0.9062$$

   possui um zero no intervalo $(-1, 0)$ e outro no intervalo $(0, 1)$.

3. Mostre que as seguintes equações possuem exatamente uma raiz e que em cada caso a raiz está no intervalo $[0.5, 1]$.

   (a) $x^2 + \ln x = 0$

   (b) $xe^x - 1 = 0$.

   Determine essas raízes, com duas casas decimais corretas, usando o método da bissecção. Antes de calcular, estime quantas iterações serão necessárias para obter o resultado.

4. Encontre com precisão de três casas decimais a raiz da equação

   $$\sin(x) - 0.750 = 0$$

   pelo método da falsa posição com $a = 0.80$ e $b = 0.90$.

5. Considere a função dada pela expressão

   $$f(x) = \begin{cases} \delta & , \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 4(1+\delta)(x - x^2) - 1 & , \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases},$$

   sendo δ um parâmetro real.

(a) Utilizando o método da falsa posição, mostre que o primeiro termo da sequência gerada com $a = 0$ e $b = 1$ é dado por
$$z_0 = 1 - \frac{1}{1+\delta}.$$

(b) Mostre que o termo z_n é dado por
$$z_n = 1 - \frac{1}{(1+\delta)^{n+1}},$$
caso n seja tal que $z_{n-1} \leq \frac{1}{2}$.

(c) Para $\delta = 10^{-6}$, quantas iterações são necessárias para que $z_n \geq \frac{1}{2}$? No caso de bissecção, quantas iterações são necessárias para atingir um erro absoluto de 2^{-48}?

6. Calcule 5 iterações por falsa posição para a função do exercício anterior com $\delta = 0.1$.

7. Considere o método da bissecção para aproximar a raiz quadrada de 2:

(a) Escolha $M_0 > 0$ e $m_0 > 0$, tais que $m_0^2 < 2$ e $M_0^2 > 2$ (por exemplo $m_0 = 1$ e $M_0 = 2$), e seja $\alpha_0 = \frac{M_0+m_0}{2}$.

(b) Escolhidos m_k, M_k e α_k, defina

- $m_{k+1} = m_k$ e $M_{k+1} = \alpha_k$, se $\alpha_k^2 > 2$
- $m_{k+1} = \alpha_k$ e $M_{k+1} = M_k$, se $\alpha_k^2 < 2$
- $\alpha_{k+1} = \frac{m_{k+1}+M_{k+1}}{2}$

Prove, matematicamente, que

(a) Para k fixo, temos $m_k \leq \alpha_\ell \leq M_k$, $\forall \ell \geq k$.

(b) $M_k - m_k \leq \frac{M_0-m_0}{2^k}$, $\forall k \geq 0$.

(c) $|\alpha_k^2 - 2| \leq M_k^2 - m_k^2 = (M_k + m_k) * (M_k - m_k) \leq 2M_0 \frac{M_0-m_0}{2^k}$.

Assim, conseguimos fazer α_k^2 se aproximar arbitrariamente de 2. Para isso, basta escolher valores suficientemente grande de k.

Dicas

(a) Para resolver esse item, primeiro mostre, por indução, que as sequências de números $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_r, ...$ e $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_r, ...$ são não decrescente e não crescente, nesta ordem, ou seja, vale que
$$m_{k+1} \geq m_k \qquad \text{e} \qquad M_{k+1} \leq M_k$$
para todo número $k \geq 0$. A partir daí, conclua que
$$m_\ell \geq m_k \qquad \text{e} \qquad M_\ell \leq M_k$$
para $\ell \geq k$. Utilize essas relações para concluir o que se pede.

(b) Para resolver esse item, deve-se separar em 2 casos, conforme $\alpha_k^2 > 2$ ou $\alpha_k^2 < 2$. No primeiro caso, por exemplo, o algoritmo diz para definir

$$m_{k+1} = m_k \text{ e } M_{k+1} = \alpha_k = \tfrac{M_k + m_k}{2}.$$

Utilize essas relações para estimar a diferença $M_{k+1} - m_{k+1}$ em função de $M_k - m_k$. Uma vez feito isso, utilize a hipótese de indução para concluir o que se pede. A análise do segundo caso é praticamente idêntica ao do primeiro. Basta fazer as modificações necessárias.

(c) O ponto chave para responder esse item é localizar os pontos m_k, M_k, α_k e 2 na reta real de modo ordenado, ou seja, verificar se $\alpha_k^2 > M_k^2 > 2 > m_k^2$, por exemplo (esse não é o caso!). Uma vez feito isso, o caminho para a resposta consiste, essencialmente, em responder a seguinte pergunta:

Sejam u e v dois números reais tais que $3 \leq u \leq 5$ e $3 \leq v \leq 5$. Qual é o máximo valor que $|u - v|$ pode ter? É possível que $|u - v| > 5 - 3 = 2$?

8. Considere a função $f(x) = arctg(x) + \frac{3}{2} arctg(x^2)$.

(a) Mostre que $f(x)$ possui uma única raiz em $[-1, -0.5]$.

Sugestão: siga os seguintes passos

- Mostre que a equação $f'(x) = 0$ é equivalente a uma equação polinomial do tipo

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

- Mostre que $p'(x)$ é uma função decrescente em $[-1, -0.5]$ e que $p'(-0.5) > 0$.
- Conclua que $p'(x) > 0$ para todo $x \in [-1, -0.5]$.

(b) Aplique 5 passos do método da bissecção para $f(x) = 0$.

(c) Seja α a raiz de $f(x) = 0$ em $[-1, -0.5]$ e sejam $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ os valores gerados pelo método da bissecção para a equação $f(x) = 0$. Encontre n, sem calcular $x_1, x_2, ..., x_k, ...$, de modo que $|x_k - \alpha| < 10^{-13}$ para $k \geq n$.

2 Métodos de ponto fixo

1. Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2.0$. Considere ainda os processos iterativos:

(a) $x_{k+1} = \frac{2x_k^2 + 2}{5}$

(b) $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}$

Qual dos dois processos você utilizaria para obter a raiz x_1? Por quê?

2. Considere as seguintes funções:

    (a) $\psi_1(x) = 2x - 1$
    (b) $\psi_2(x) = x^2 - 2x + 2$
    (c) $\psi_3(x) = x^2 - 3x + 3$

    Verifique que 1 é ponto fixo de todas essas funções. Qual delas você escolheria para obter o ponto fixo 1, utilizando o processo iterativo $x_{k+1} = \psi(x_k)$? Com a sua escolha, exiba a sequência gerada a partir da condição inicial $x_0 = 1.2$.

3. A equação $x^2 - N = 0$ possui uma raiz $\xi = \sqrt{N}$. Explicar por que a sequência $\{x_k\}$, obtida por meio do processo iterativo definido por $x_{k+1} = \frac{a}{x_k}$ não converge para $\sqrt{a}$ qualquer que seja o valor de x_0. Repita a análise para o processo iterativo $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{N}{x_k}\right)$.

4. Considere a função $f(x) = x^3 + 5x - 1$. Temos que $f(0) = -1$ e $f(1) = 5$ e, portanto, f possui uma raiz no intervalo $[0,1]$. Podemos escrever a equação $f(x) = 0$ de duas maneiras distintas:
$$x = \frac{1 - x^3 - x}{4} \quad \text{e} \quad x = \frac{1 - x^3}{5}.$$
    Para resolver a equação $f(x) = 0$ pelo método do ponto fixo, consideramos, portanto, as funções de iteração: $\varphi_1(x) = \frac{1-x^3-x}{4}$ e $\varphi_2(x) = \frac{1-x^3}{5}$. Escolha, em cada caso, $x_0 \in [0,1]$ tal que o método do ponto fixo
$$x_{k+1} = \varphi_i(x_k)$$
    converge para a raiz de f em $[0,1]$. Para qual função, dentre φ_1 e φ_2, é esperada a convergência mais rápida?

5. A fórmula $x_{n+1} = 2x_n - a(x_n)^2$ é candidata para se determinar o inverso do número a pelo método de ponto fixo.

    (a) Mostre que, se para um dado x_0, a sequência gerada é convergente, então ela converge para $\frac{1}{a}$.
    (b) Para $a = 2$, determine $\varepsilon > 0$ tal que o método é convergente para todo x_0 no intervalo $\left[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right]$.

6. Considere a função $h(x) = x + ln(x), x > 0$.

    (a) Mostre que a equação $h(x) = 0$ possui apenas uma solução positiva.
    (b) Deseja-se calcular $\alpha > 0$ tal que $h(\alpha) = 0$ por um método do ponto fixo $x_{k+1} = \Phi(x_k), k = 0, 1, 2, \ldots$. Qual das funções
$$\Phi_1(x) = -ln(x) \qquad \Phi_2(x) = e^{-x} \qquad \Phi_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$$
    é a mais adequada para esse fim? Justifique com base na análise de convergência para cada caso.

(c) Para a função escolhida, calcule 5 iterações partindo do ponto $x_0 = 0.1$.

(d) Para $x_0 = 0.1$ e para a função escolhida, determine o número de iterações necessárias (sem fazer as iterações) para calcular α com precisão de 10^{-7}.

7. A equação $e^x - 3x^2$ possui três raízes reais. Considere as duas funções de iteração

$$\varphi_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{e^x}{3}}.$$

(a) Verifique que, começando com $x_0 = 0$, haverá convergência

- para a raiz mais próxima de -0.5, se φ_- for utilizada.
- para a raiz mais próxima de 1, se φ_+ for utilizada.

Explique essa diferença.

(b) Determine para quais escolhas de pontos iniciais x_0, o processo iterativo é convergente para a raiz mais próxima de 4.

8. A equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ pode ser reescrita como $x = G(x)$ de diversas formas diferentes para aplicação do método do ponto fixo (iterações lineares). Determine analiticamente a região de convergência para as raízes $x = 1,\ 2$ e faça os gráficos de convergência $y = G(x)$ superposto à reta $y = x$ para os seguintes casos:

(a) $x_{n+1} = (x_n^2 + 2)/3$

(b) $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$

9. Seja ϕ a função definida por

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

(a) Mostre que $x^* \;=\; \sqrt{2}$ é um ponto fixo de ϕ.

(b) Estime o máximo valor absoluto da derivada ϕ no intervalo $[1, \infty[$ e conclua que ϕ é uma contração nesse intervalo.

(c) Conclua que se $x_0 \;\in\; [1, \infty[$ a sequência definida

$$x_{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

converge para $\sqrt{2}$.

10. Deseja-se resolver a equação $x^3 - x - 1 = 0$ pelo método do ponto fixo, utilizando $x_0 = 1$ e a seguinte função de iteração

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

(a) Mostre que a equação em questão possui uma única raiz α no intervalo $[1.3, 1.4]$ e que α é ponto fixo de ϕ.

(b) Calcule 10 iterações, partindo-se de $x_0 = 1$.

(c) Mostre que $\phi(y) - \phi(x) = (y-x)\left(\frac{1}{xy} + \frac{x+y}{x^2y^2}\right)$ e conclua que ϕ **NÃO** é uma contração em qualquer intervalo $[a,b]$ que contenha a raiz α.

(d) Mostre que a derivada $\phi'(x)$ é crescente no intervalo $[1.3, 1.4]$ e que, portanto,

$$\min_{x\ \in[1.3,1.4]} |\phi'(x)| \geq |\phi'(1.4)| > 1.2.$$

(e) Utilizando o Teorema do valor médio

$$\tfrac{\phi(x_n)-\alpha}{x_n-\alpha} = \phi'(\xi), \text{ com } \xi \text{ entre } x_n \text{ e } \alpha,$$

conclua que, sempre que $x_n \in [1.3, 1.4]$ e $x_n \neq \alpha$, então

$$|x_{n+1} - \alpha| = |\phi(x_n) - \alpha| \geq 1.2|x_n - \alpha|.$$

(f) Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ e considere a sequência definida por $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Mostre que, se $x_j \in [1.3, 1.4]$ e $x_j \neq \alpha$, então existe algum $k > j$ tal que $x_k \neq [1.3, 1.4]$. Conclua que, em geral, a sequência gerada por ϕ não é convergente e que essa função não é adequada para resolver a equação dada.

3 Método de Newton

Teorema 1 (Teorema da convexidade)**.** *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que*

- *$f(a)f(b) < 0$.*
- *$f'(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ e $f''(x)$ não troca de sinal em $[a,b]$.*

Então existe uma única raiz α de f em $[a,b]$ e, se $x_0 \in [a,b]$ é tal que $x_1 \in [a,b]$, então o método de Newton para f converge para α.

1. Mostre que a equação $x^3 + 2x - 1 = 0$ possui uma única raiz real e determine o seu valor correto até duas casas decimais utilizando o método de Newton.

   Aplique o método de Newton-Raphson à equação: $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, com $x_0 = 1.9$. Justifique os resultados obtidos.

2. Considere a identidade trigonométrica

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8cos^2(\theta) + 1.$$

   Temos que as raízes do polinômio $p(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ são dadas por $-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $-\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ e $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

   (a) Determine um intervalo $[a,b]$ que contenha a maior raiz de $p(x)$ para o qual as hipóteses do Teorema da convexidade sejam satisfeitas, de modo que $b - a < 1$.

(b) Escolha um ponto $x_0 \in [a, b]$ para o qual a sequência gerada pelo método de Newton para a equação $p(x) = 0$ seja convergente e monte uma tabela explicitando os cálculos (finais e intermediários) das primeiras 5 iterações do método de Newton-Raphson, com ponto inicial x_0 escolhido.

3. Use o método Newton-Raphson para obter a menor raiz positiva das equações a seguir com precisão 10^{-2}:

   (a) $x/2 - \tan(x) = 0$ (b) $2\cos(x) - \exp(x)/2 = 0$ (c) $x^5 - 6 = 0$

4. Use o método de Newton para obter a menor raiz positiva das equações a seguir com erro inferior a 10^{-4}. Prove, se possível, que a sequência obtida é convergente.

   (a) $\frac{x}{2} - \tan(x) = 0.$
   (b) $2\cos(x) = \frac{e^x}{2}.$
   (c) $x^5 - 6 = 0.$

5. Mostre que a função $f(x) = x^3 - 8x + 5$ tem três raízes reais distintas. Prove que, partindo de $x_0 = 0.1$, a sequência gerada pelo método de Newton converge para a raiz intermediária. Calcule essa raiz com precisão $\varepsilon = 10^{-2}$.

6. Aplique o método de Newton à função $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + x - 2$ para encontrar uma solução real da equação $f(x) = 0$ com precisão $\varepsilon = 10^{-3}$. Justifique tudo o que for necessário para garantir a convergência.

7. Considere a função $f(x) = -2\sin(x) + x$.

   (a) Localize graficamente os zeros desta função, indicando um intervalo para cada raiz.
   (b) Faça $x_0 = -0.8971$ e realize 3 iterações do método de Newton (considere tolerância 10^{-3}). Analise a solução obtida, considerando o chute inicial que foi escolhido.

8. Faça uma interpretação geométrica dos métodos de Newton e da Secante.

9. A equação $x = \tan(x)$ possui uma única raiz no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Calcule-a pelo método das secantes, com erro inferior a 10^{-3}.

10. Seja $f(x) = xe^{-x} - e^{-3}$.

    (a) verifique gráfica e analiticamente que $f(x)$ possui um zero no intervalo $(0, 1)$;
    (b) justifique teoricamente o comportamento da sequência exibida abaixo, gerada pelo método de Newton para o cálculo do zero de f em $(0, 1)$, com $x_0 = 0.9$ e precisão $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$.

$x_0 = 0.9$	$x_3 = -5.1452$	$x_6 = -2.7182$	$x_9 = -0.7444$	$x_{12} = 0.0440$
$x_1 = -6.8754$	$x_4 = -4.3079$	$x_7 = -1.9863$	$x_{10} = -0.3041$	$x_{13} = 0.0480$
$x_2 = -6.0024$	$x_5 = -3.4962$	$x_8 = -1.3189$	$x_{11} = 0.0427$	

4 Miscelânea

1. Considere a função $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 - x - 3$. Encontre o único ponto de mínimo de f, com erro menor que 10^{-5}, pelos métodos da bissecção e de Newton. Mostre que o método de Newton converge para $x_0 > 1$.

2. Considere a sequinte equação:
$$2\cos x - \frac{1}{2}e^x.$$
Nos itens abaixo considere como aproximações iniciais: $[0, 1]$ para bisseção; $x_0 = 0.5$ para o método de Newton; e $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 0.6$ para o método da Secante. O teste de parada é através do valor da função com precisão 10^{-8}.

    (a) Realize uma iteração de cada método: cálculo da nova aproximação e teste de parada.

    (b) Resolvendo esse problema usando o Matlab, os resultados obtidos foram os seguintes:

Método	iterações	tempo(seg)	x
Bisseção	27	0.09023	0.9047882184386253
Newton	4	0.04236	0.904788212178730189
Secante	5	0.0195	0.9047882178676230

    i. Qual o método com menor *tempo médio por iteração*? Este resultado é esperado? Por que?

    ii. Analise o desempenho de cada método considerando: o algoritmo geral do método, o número de iterações e tempo de execução gastos nesse problema. Qual dos três métodos foi o mais eficiente na resolução deste problema?

3. Considere a função $f(x) = e^x - 4x^2$.

    (a) Localize graficamente os zeros de f.

    (b) Considere o intervalo $I = [-1, 5]$. Realize duas iterações do método da bisseção e escolha o ponto médio do último intervalo obtido como aproximação inicial para o método de Newton. Aplique o método de Newton até atingir a precisão 10^{-2}. Comparando com a localização dos zeros realizada no item anterior, identifique qual o zero obtido neste processo e justifique por que a convergência foi para esta raiz.

4. O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações: $\sin(x) = 0$ e $\cos(x) + 1 = 0$.

    (a) Aplique o método de Newton com $x_0 = 3$ e precisão 10^{-2} em cada caso e compare os resultados. Justifique os resultados obtidos.

    (b) O método da bisseção pode ser aplicado na resolução da equação $\cos(x) + 1 = 0$ para obter o valor de π?

5. Considere a equação $4\cos(x) - e^x = 0$. Encontre a raiz positiva com quatro casas decimais corretas utilizando

   (a) bissecção;

   (b) método de Newton.

   (c) Utilizando a expressão
   $$p \simeq \frac{\log\left(\left|\frac{\Delta x_{k+1}}{\Delta x_k}\right|\right)}{\log\left(\left|\frac{\Delta x_k}{\Delta x_{k-1}}\right|\right)},$$
   obtenha o valor de p para $k+1$ a última iteração calculada nos itens (a) e (b), em que $\Delta x_k = x_k - \xi$ é o erro absoluto entre a aproximação x_k e a raiz exata ξ. Considere que a solução exata é $\xi = 0.9047882$.

   (d) Deduza a expressão aproximada para ordem de convergência p utilizada no item (c).

6. Considere a fórmula para determinar a raiz cúbica de Q:
   $$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{Q}{x_k^2}\right)$$

   (a) Mostre que a fórmula anterior é um caso especial de iteração de Newton;

   (b) Usando a fórmula dada, calcule $\sqrt[3]{4}$, com precisão 10^{-2}, determinando o valor inicial através do gráfico.

7. Considere a equação dada no exercício anterior. Obtenha a raiz positiva com 5 casas decimais corretas pelo método da Falsa Posição. Confirme que a ordem de convergência é $p \simeq 1.618$.

8. Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$. Supomos que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam contínuas e limitadas num intervalo fechado I contendo ξ e que $f'(\xi) = 0$ e $f''(\xi) \neq 0$.

   (a) Mostre que o método iterativo definido por
   $$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
   converge para ξ se $x \in I$.

   (b) O método definido em (a) estende-se para uma raiz de multiplicidade m da seguinte maneira:
   $$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
   Calcular a raiz ξ próxima de 1 da equação:
   $$f(x) = x^4 - 3.1x^3 + 2.52x^2 + 0.432x - 0.864 = 0$$
   com erro relativo inferior a 10^{-3}, usando método descrito aqui e sabendo que $f(\xi) = f'(\xi) = f''(\xi) = 0$ e $f'''(\xi) \neq 0$.

9. Uma das dificuldades do método de Newton está na possibilidade de uma aproximação x_k ser tal que $f'(x_k) = 0$. Uma modificação do algoritmo original para prever estes casos consiste em: dado λ um número positivo próximo de zero e supondo $|f'(x_0)| \geq \lambda$, a sequência x_k é gerada através de $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/FL$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$FL = \begin{cases} f'(x_k), \text{se} |f'(x_k)| > \lambda \\ f'(x_w), \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde x_w é a última aproximação obtida tal que $|f'(x_k)| \geq \lambda$. Pede-se:

(a) baseado no algoritmo de Newton, escreva um algoritmo para este método;

(b) aplique este método à resolução da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$, com $x_0 = -1.275$, $\lambda = 0.05$ e $\varepsilon = 0.05$.