UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

BC1419 Cálculo Numérico - LISTA 2 - Sistemas de Equações Lineares

(Profs. André Camargo, Feodor Pisnitchenko, Marijana Brtka, Rodrigo Fresneda)

1 Métodos diretos

1. Analise os sistemas lineares abaixo com relação ao número de soluções, usando o método de Eliminação de Gauss (trabalhe com três casas decimais):

   (a)
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -9 \\ 9x_1 - 6x_2 + 19x_3 + x_4 = 23 \\ 6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 15x_4 = 11 \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} 0.252x_1 + 0.36x_2 + 0.12x_3 = 7 \\ 0.112x_1 + 0.16x_2 + 0.24x_3 = 8 \\ 0.147x_1 + 0.21x_2 + 0.25x_3 = 9 \end{cases}$$

2. Considere o sistema linear
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   a) Resolva-o pelo método de Eliminação de Gauss.

   b) Calcule o determinante de A usando a matriz triangular obtida no item **a)**.

3. Verificar, usando o método de Eliminação de Gauss, que o sistema linear
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$
   não tem solução.

4. Usando eliminação de Gauss, verifique que o sistema linear
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 2 & -1 & 2 \\ \alpha & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   (a) possui uma única solução quando $\alpha = 0$.

   (b) possui infinitas soluções quando $\alpha = 1$.

   (c) não tem solução quando $\alpha = -1$.

5. Resolva o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

por:

(a) decomposição LU;

(b) eliminação Gaussiana.

(c) Calcule o determinante da matriz de coeficientes por meio das decomposições.

6. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema pelo método da eliminação de Gauss.

(b) Resolva o sistema utilizando a decomposição LU.

7. A decomposição $PA = LU$ de uma matriz 3×3 é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Utilizando a decomposição acima, resolva o sistema linear $Ax = b$, com $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) Obtenha a matriz A.

8. Resolva o sistema abaixo utilizando eliminação Gaussiana

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ao final, escreva a matriz triangular obtida $A^{(3)}$ em termos do produto $A^{(3)} = MA$, isto é, determine M.

9. Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & w \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ r \end{pmatrix}$$

(a) Aplique o método da Eliminação de Gauss, sem pivoteamento parcial, deixando os valores em função de w e r.

(b) Para quais valores de w e r o sistema linear

- admite infinitas soluções;
- admite solução única;
- não admite solução;

Justifique.

10. Através do método de Eliminação de Gauss, resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 0.0001x_1 + 1.00x_2 = 1.00 \\ 1.00x_1 + 1.00x_2 = 2.00 \end{cases}$$

usando em todas operações três dígitos significativos.

Resolver o mesmo sistema linear pelo método de Eliminação de Gauss **com pivoteamento parcial**, usando em todas as operações três dígitos significativos.

11. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}.$$

a) Resolva-o usando decomposição LU.

b) Calcule o determinante de A usando a decomposição.

12. Quais das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 17 \end{pmatrix},$$

podem ser decompostas na forma LU? Decompor as que forem possíveis.

13. Calcule a fatoração LU, se possível, de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. (a) Mostre que resolver $AX = B$, onde A é uma matriz $n \times n$, X e B são matrizes $n \times m$, é equivalente a resolver m sistemas do tipo $Ax = b$, onde A é uma matriz $n \times n$, x e b são vetores $n \times 1$.

(b) Usando o item anterior, verifique que A^{-1} pode ser obtida através de resolução de n sistemas lineares.

(c) Entre o método da Eliminação de Gauss e a fatoração LU, qual o mais indicado para o cálculo de A^{-1}?

(d) Aplique o método escolhido no item (c) para obter a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Obtenha as inversas destas matrizes usando o procedimento do exercício anterior.

16. Justifique, se for verdadeira, ou dê contra-exemplo, se for falsa, a afirmação:

"Dada uma matriz A, $n \times n$, sua fatoração LU, obtida com estratégia de pivoteamento parcial, é tal que todos os elementos da matriz L têm módulo menor ou igual a 1."

17. Demonstrar que, se no início da etapa k do processo da Eliminação de Gauss com estratatégia de pivoteamento parcial, a escolha do pivô resultar no pivô nulo, então $det(A) = 0$ e a matriz A não é inversível. Dê exemplos com esta situação.

18. Verifique que $|\det(A)| = |\det(U)|$, onde U é a matriz triangular superior obtida após o processo da eliminação de Gauss ou fatoração LU. Use este procedimento para obter o determinante das matrizes do exercício 7.

19. Considere

$$A = \begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Pede-se:

(a) encontre o conjunto solução da equação $\det(A) = 0$;

(b) utilizando o maior valor de x encontrado no item anterior, encontre o valor de m para que o sistema linear $Ax = b$ tenha infinitas soluções. (Use o processo da eliminação de Gauss).

20. Resolva o sistema linear abaixo através da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial. Discuta a existência ou não de soluções.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolva este sistema usando o MatLab e analise a resposta obtida.

(b) Idem ao anterior com a mesma matriz A e vetor $b = (4 \quad -1 \quad 6)^T$.

21. Resolva o sistema linear abaixo através da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \\ 9 & -6 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -6 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} -18 \\ 31 \\ 35 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

22. Suponha que a matriz simétrica A de dimensão $n \times n$ possui uma única decomposição $A = L \times D \times U$, sendo $D = (d_{i,j})$ uma matriz diagonal, $L = (\ell_{i,j})$ uma matriz triangular inferior e $U = (u_{i,j})$ uma matriz triangular superior tais que

$$\ell_{i,i} = u_{i,i} = 1, i = 1, 2, \ldots, n.$$

   (a) Utilizando a fórmula para tranposta de um produto de matrizes: $(MN)^t = N^t M^t$, mostre que $U = L^t$.

   (b) Se os elementos da matriz diagonal D são todos positivos, mostre que A possui uma fatoração da forma $A = KK^t$, sendo K uma matriz triangular inferior (tal decomposição é chamada de decomposição de Cholesky).

23. Para uma matriz genérica A de ordem 3,

   (a) verifique que o método de eliminação Gaussiana sem pivoteamento produz um sistema da forma
   $$A^{(3)}x = b^{(3)},$$
   em que $A^{(3)}$é uma matriz triangular superior. Encontre os coeficientes de $A^{(3)}$ e $b^{(3)}$ como funções dos coeficientes de A e de b.

   (b) Encontre a matriz M tal que $A^{(3)} = MA$

   (c) Verifique que uma decomposição LU de A é dada por $A = M^{-1}A^{(2)}$, relacionando os componentes de L e de U com aqueles de M^{-1} e de $A^{(2)}$, respectivamente.

   (d) A partir do item (c), verifique que as condições necessárias para que a eliminação Gaussiana possa ser feita sem pivoteamento são as mesmas para a existência da decomposição LU.

24. Seja A uma matriz de ordem n decomponível em LU. Sejam $\det A_i$, $i = 1, .., n$, seus menores principais. Mostre que
$$u_{ii} = \frac{\det A_i}{\det A_{i-1}}, \quad i = 1, 2, ..., n$$
(assuma $\det A_0 = 1$).

25. Mostre que se A é uma matriz positiva definida, então $A = LDL^T$, em que L é uma matriz triangular inferior e D é uma matriz diagonal positiva.

26. Utilize o resultado anterior para mostrar que uma matriz positiva-definida pode ser decomposta na forma $A = LL^T$, em que L é uma matriz triangular com elementos diagonais positivos.

27. Mostre que se o sistema linear $Ax = b$, $\det A \neq 0$, é transformado no sistema $Bx = c$, com $B = A^T A$ e $c = A^T b$, então a matriz B pode ser decomposta em $B = LL^T$ como no exercício anterior. Aplique este procedimento para resolver o sistema abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

28. Considere o sistema linear

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

   (a) Resolva-a o pelo método de eliminação Gaussiana com pivoteamento parcial, trabalhando com arredondamento para dois dígitos significativos em cada operação.

   (b) Refine a solução obtida em a) utilizado o procedimento iterativo de refinamento.

29. Seja A uma matriz de ordem n. Podemos encontrar A^{-1}, a inversa de A, resolvendo o conjunto de sistemas lineares

$$Ax^{(i)} = e^{(i)},\ i = 1, ..., n\,,$$

em que os vetores $e^{(i)}$ são as colunas da matriz identidade de ordem n e os vetores $x^{(i)}$ são as colunas de A^{-1}. Utilizando decomposição LU, inverta a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Métodos iterativos

1. (a) Aplique os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel no sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -3 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

   (b) Repita o item (a) para o sistema obtido permutando as equações.

   (c) Compare os resultados obtidos.

2. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Reescreva o sistema, ordenando as incógnitas e equações de forma que o método de Gauss-Seidel seja convergente quando aplicado ao sistema resultante. Calcule duas iteração do método a partir de $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Em cada sistema linear $Ax = b$ abaixo, verifique se o critério das linhas é satisfeito e aproxime a solução pelo método de Gauss-Seidel, se possível:

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Um possível teste de parada para um método iterativo é testar se o resíduo: $r_k = Ax^{(k)} - b$ está próximo de zero. Como realizar computacionalmente esse teste?

5. Dado o sistema linear
$$\begin{array}{rcrcrcl} 10x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 20 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 30 \end{array} .$$

   (a) Verifique a possibilidade de aplicação do método de Jacobi. Justifique.

   (b) Se possível, resolver o sistema linear pelo método de Jacobi obtendo um resultado com erro relativo $\varepsilon < 10^{-2}$ na norma do máximo.

6. Mostre que se a matriz A é estritamente diagonal dominante, o critério de Sassenfeld é satisfeito, i.e., $\beta_i < 1$, $i = 1, ..., n$, em que
$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| .$$

7. Dado o sistema linear
$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 + 6x_3 & = & 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & 3 \end{array}$$
   mostre que é possível reordenar as equações acima (trocando linhas) de modo a fazer com que o critério de Sassenfeld seja satisfeito.

8. Dado o sistema linear
$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 & = & -1 \end{array}$$

(a) Verifique a possibilidade de aplicação do método de Gauss-Seidel.

(b) Se possível, resolvê-lo pelo método de Gauss-Seidel com erro relativo $\varepsilon < 10^{-2}$ na norma do máximo.

9. Suponha que o sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 - \alpha x_2 &= c_1 \\ -\alpha x_1 + x_2 - \alpha x_3 &= c_2 \\ -\alpha x_2 + x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

seja resolvido iterativamente pelas fórmulas

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \alpha x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} &= \alpha \left(x_1^{(k)} + x_3^{(k)} \right) + c_2 \\ x_3^{(k+1)} &= \alpha x_2^{(k)} + c_3 \end{aligned}$$

Para que valores de α a convergência do método acima é garantida? Justifique.

10. Considere o sistema linear $Ax = b$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & 9 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Entre os dois métodos iterativos, Jacobi e Gauss-Seidel, qual deles você aplicaria? por quê? Resolva-o pelo método escolhido com $\varepsilon < 10^{-2}$ na norma do máximo.

11. Prove que o método de Jacobi para sistemas 2×2 sempre converge se a matriz de coeficientes é positiva-definida. (Dica: calcule o(s) autovalor(es) da matriz de iteração)

12. Considere o sistema linear

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}}^{A} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad (*).$$

(a) Calcule três iterações do método de Jacobi partindo-se de $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) A matriz A do sistema satisfaz o critério das linhas (é estritamente diagonal dominante)?

(c) Para o sistema (*), as iterações do método de Jacobi e a solução do sistema x^* satisfazem

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{4}\left(5 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{4}\left(2 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{4}\left(5 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right) \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1^* &= \tfrac{1}{4}\left(5 - x_2^* - x_3^*\right) \\ x_2^* &= \tfrac{1}{4}\left(2 - x_1^* - x_3^*\right) \\ x_3^* &= \tfrac{1}{4}\left(5 - x_1^* - x_2^*\right) \end{aligned} \right. .$$

Para cada valor de $k \geq 0$, seja $M_k := \max\{|x_1^{(k)} - x_1^*|, |x_2^{(k)} - x_2^*|, |x_3^{(k)} - x_3^*|\}$. Mostre que

$$M_{k+1} \leq \tfrac{1}{2} M_k, \quad \forall\ k\ \geq 0.$$

(d) Utilize o item anterior para concluir que o Método de Jacobi converge no caso do sistema (*).

(e) Se trocarmos a ordem das incógnitas $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_2, x_3, x_1)$ em (*), obtemos o sistema

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}^{B} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad (**),$$

o qual fornece, obviamente, a mesma solução que (*).

(f) A matriz B satisfaz o critério das linhas?

(g) Para o sistema (**), as iteradas do método de Jacobi e a solução do sistema x^* satisfazem

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_3^{(k+1)} & = & \frac{1}{1}\left(5 - x_2^{(k)} - 4x_1^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{1}\left(2 - 4x_2^{(k)} - x_1^{(k)}\right) \\ x_1^{(k+1)} & = & \frac{1}{1}\left(5 - x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}\right) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_3^* & = & \frac{1}{1}\left(5 - x_2^* - 4x_1^*\right) \\ x_2^* & = & \frac{1}{1}\left(2 - 4x_2^* - x_1^*\right) \\ x_1^* & = & \frac{1}{1}\left(5 - x_2^* - 4x_3^*\right) \end{array}\right. .$$

Para cada valor de $k \geq 0$, seja $M_k := \max\{|x_1^{(k)} - x_1^*|, |x_2^{(k)} - x_2^*|, |x_3^{(k)} - x_3^*|\}$. Mostre que

$$M_{k+1} \geq 3M_k, \quad \forall\ k\ \geq 0.$$

Utilize o item anterior para concluir que o Método de Jacobi não converge no caso do sistema (**).

13. Considere os sistemas de equações lineares

$$\text{(i)} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 1x_2 & + & 1x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 1x_3 & = & 3 \\ 1x_1 & + & 1x_2 & + & 1.5x_3 & = & 4 \end{array}\right. ,$$

$$\text{(ii)} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & 2.5x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 1x_3 & = & 3 \\ 1x_1 & + & 1x_2 & + & 1.5x_3 & = & 4 \end{array}\right. .$$

Observe que o sitema (ii) foi obtido a partir do sistema (i) somando-se a terceira linha na primeira. Logo, eles são equivalentes.

Queremos resolver o sistema (i) ou (ii) pelo método de Gauss-Seidel partindo-se de um chute inicial $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^t$ fixado de forma a obter a melhor aproximação possível na vigésima iteração. A qual dos dois sistemas devemos aplicar o método de Gauss-Seidel com esse objetivo?

14. Considere os sistemas lineares:

$$(I) = \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

e

$$(II) = \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -9 \end{cases}$$

Aplicando os critérios que você conhece, qual dos métodos iterativos será seguramente convergente? Justifique.

15. Considere o sistema linear:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Reordene as equações convenientemente e aplique o método de Gauss-Seidel com garantia de convergência.

16. O critério das linhas afirma que, se o número

$$\sigma \; := \; \max_{1 \le i \le n} \left(\frac{1}{|a_{i,i}|} \sum_{j \ne i} |a_{i,j}| \right)$$

é menor do que 1, então o método de Jacobi converge quando aplicado a um sistema com matriz $A = (a_{i,j})$. Queremos aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \pi^2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \pi^2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \pi^2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \pi^2 \end{bmatrix}}_{A} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $x^{(*)}$ a solução do sistema. Use a estimativa

$$||x^{(k)} - x^{(*)}||_\infty \le \tfrac{\sigma^k}{1-\sigma} ||x^{(1)} - x^{(0)}||_\infty$$

para determinar o número de iterações necessárias para obter um aproximação com erro inferior a $\epsilon = 10^{-8}$, partindo-se do ponto $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

17. Considere o sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

O objetivo desse exercício é mostrar que o método de Jacobi converge para o sistema dado, mesmo A não satisfazendo o critério das linhas. Para o sistema (*) dado, as iterações do método de Jacobi e a solução do sistema x^* satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1^{(k+1)} & = & \alpha + \frac{1}{2}\left(x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} & = & \beta + \frac{1}{2}\left(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} & = & \gamma + \frac{1}{2}\left(x_2^{(k)} + x_4^{(k)}\right) \\ x_4^{(k+1)} & = & \delta + \frac{1}{2}\left(x_3^{(k)}\right) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1^{(*)} & = & \alpha + \frac{1}{2}\left(x_2^{(*)}\right) \\ x_2^{(*)} & = & \beta + \frac{1}{2}\left(x_1^{(*)} + x_3^{(*)}\right) \\ x_3^{(*)} & = & \gamma + \frac{1}{2}\left(x_2^{(*)} + x_4^{(*)}\right) \\ x_4^{(*)} & = & \delta + \frac{1}{2}\left(x_3^{(*)}\right) \end{array} \right. .$$

(a) Determine a iteração $k+2$, isto é, o vetor $x^{(k+2)}$, em função de $x^{(k)}$. Mais precisamente, mostre que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1^{(k+2)} & = & (\alpha + \frac{1}{2}\beta) + \frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+2)} & = & (\beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma) + \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{4}x_4^{(k)} \\ x_3^{(k+2)} & = & (\gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\delta) + \frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} \\ x_4^{(k+2)} & = & (\delta + \frac{1}{2}\gamma) + \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{1}{4}x_4^{(k)} \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1^{(*)} & = & (\alpha + \frac{1}{2}\beta) + \frac{1}{4}x_1^{(*)} + \frac{1}{2}x_3^{(*)} \\ x_2^{(*)} & = & (\beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma) + \frac{1}{2}x_2^{(*)} + \frac{1}{4}x_4^{(*)} \\ x_3^{(*)} & = & (\gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\delta) + \frac{1}{4}x_1^{(*)} + \frac{1}{2}x_3^{(*)} \\ x_4^{(*)} & = & (\delta + \frac{1}{2}\gamma) + \frac{1}{4}x_2^{(*)} + \frac{1}{4}x_4^{(*)} \end{array} \right. .$$

(b) Mostre que, para qualquer índice $k \geq 0$, vale

$$||x^{(k+2)} - x^{(*)}||_\infty \leq \tfrac{3}{4}||x^{(k)} - x^{(*)}||_\infty$$

e, portanto,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ||x^{(2k)} - x^{(*)}||_\infty & \leq & \left(\frac{3}{4}\right)^k ||x^{(0)} - x^{(*)}||_\infty \\ ||x^{(2k+1)} - x^{(*)}||_\infty & \leq & \left(\frac{3}{4}\right)^k ||x^{(1)} - x^{(*)}||_\infty \end{array} \right. ,$$

o que é suficiente para afirmar que $\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)} - x^{(*)}||_\infty = 0$, ou seja, o método é convergente.

18. (a) Considere a equação diferencial $y''(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$ com condições de fronteira $y(a) = y(b) = 1$. Dada uma partição $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$ do intervalo $[a,b]$ formada por nós igualmente espaçados, isto é $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, n+1$, com $h := \frac{b-a}{n+1}$, uma aproximação $y_1, y_2, \ldots, y_n$, para os valores $y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_n)$ pode ser obtida pelo método de diferenças finitas como solução do sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} (-f(x_1)+1) \\ -f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -f(x_{n-1}) \\ (-f(x_n)+1) \end{bmatrix}.$$

A matriz A do sistema satisfaz o critério das linhas? E o critério de Sassenfeld? Com base nesses critérios, qual dentre os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel é o mais adequado para resolver esse problema?

(b) Ao escalonar a matriz A do item anterior (sem troca de linhas) para resolver o sistema pelo método de eliminação de Gauss, chegamos a uma matriz A^* que é triangular superior, cujos elementos da diagonal satisfazem a relação de recorência

$$A^*_{1,1} = 2, \quad (A^*)_{i+1,i+1} \;=\; 2 - \frac{1}{(A^*)_{i,i}}, i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Verifique essas relação para $n = 4$. Você conseguiria provar essa relação utilizando o método de indução matemática? Mostre que os elementos da diagonal de A^* são todos maiores ou iguais a 1. Sugestão:

- Escreva $(A^*)_{i+1,i+1} = \Phi(A^*_{i,i})$ e mostre que Φ possui um único ponto fixo α.
- Com base no teorema do valor médio: $\frac{\Phi(x)-\Phi(\alpha)}{x-\alpha} = \Phi'(\zeta)$, com ζ entre x e α, mostre que o denominador e o numerador de $\frac{(A^*)_{i+1,i+1}-\alpha}{(A^*)_{i,i}-\alpha}$ possuem o mesmo sinal para todo $i \geq 1$ e conclua que os termos da sequência $A^*_{1,1}, A^*_{2,2}, \ldots, A^*_{n,n}$ estão todos de um mesmo lado com relação a α.
- Conclua o resultado com base na inequação $A^*_{1,1} > \alpha$.