UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

BC1419 Cálculo Numérico - LISTA 3 - Aproximação de funções por mínimos quadrados)

(Profs. André Camargo, Feodor Pisnitchenko, Marijana Brtka, Rodrigo Fresneda)

1 Mínimos quadrados discreto

1. Considere a função $y = f(x)$, dada pela tabela:

x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	7

   Ajustá-la por um polinômio do 2º grau, usando o método dos mínimos quadrados.

2. Determinar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta mais próxima dos pontos (x_i, y_i) para a função $y = f(x)$ dada pela tabela:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	-1	0	7

3. Determinar, usando o método dos quadrados mínimos, a parábola mais próxima dos pontos (x_i, y_i) para a função $y = f(x)$ dada pela tabela:

x	-3	-1	1	2	3
y	-1	0	1	1	-1

4. De uma tabela são extraídos os valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	-1	2	4

   Usando o método dos mínimos quadrados, ajuste os dados acima por um polinômio de grau adequado. (Sugestão: use gráfico).

5. Considere a tabela

x	-2	-1	1	2
y	1	-3	1	9

.

   (a) Pelo método dos mínimos quadrados, ajuste à tabela as funções:

$$g_1(x) = ax^2 + bx\,,\ g_2(x) = cx^2 + d$$

   (b) Qual das funções fornece o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados? Justifique.

6. Os dados da tabela a seguir correspondem ao movimento de um corpo em queda livre. Ajuste os dados da tabela por uma função da forma $g(t) = \alpha + \beta t^2$ pelo método dos mínimos quadrados discreto e expresse a aceleração da gravidade $a = 2\beta$ nas unidades do Sistema Internacional.

i =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_i (1/60) s	0	2	4	6	8	10	12	14	16
x_i (cm)	0.0	2.4	6.0	10.6	16.4	23.3	31.2	40.1	50.2

2 Mínimos quadrados contínuo

1. Encontre o polinômio de grau 2 que aproxima a função $\frac{1}{x+4}$ no intervalo $[-1, 1]$ utilizando o produto escalar natural em $C[-1, 1]$.

2. Seja $f(x) = (x^3 - 1)^2$, $x \in [0, 1]$. Usando o método dos mínimos quadrados, aproximar a função $f(x)$ por

   (a) uma reta

   (b) um polinômio do segundo grau

   utilizando o produto escalar natural em $C[0, 1]$.

3. Aproximar, pelo método dos mínimos quadrados, a função $f(x) = x^3 + 4$ no intervalo $[0, 1]$ por

   (a) uma reta

   (b) um polinômio do segundo grau

   usando polinômios ortonormais.

4. Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função $f(x) = 3x^6 - x^4$ no intervalo $[-1, 1]$ por uma parábola, usando polinômios de Legendre:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n \,, \; L_0(x) = 1 \,,$$

   que são ortogonais segundo o produto escalar

$$(L_i, L_j) = \int_{-1}^{1} L_i(x) \, L_j(x) \, dx$$

   e satisfazem

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x) \, dx = \frac{2}{2n+1}$$

5. Os polinômios de Legendre

$$p_0(x) = 1 \quad p_1(x) = x \quad p_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad \text{e} \quad p_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

   são ortogonais em relação ao produto interno $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$ e sabe-se, ainda, que $\langle p_k, p_k \rangle = \frac{2}{2k+1}$, $k = 0, 1, 2$ e 3.

   (a) Use esses polinômios para aproximar a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \in [0, 2] \\ 0, & x \in]2, 3] \\ x^2, & x \in]3, 4] \end{cases}$$

no intervalo $[0,4]$ pelo método dos mínimos quadrados.

(b) Use esses polinômios para aproximar a função $f(x) = 1 + |2x - 1|$ no intervalo $[0,1]$ por uma polinômio $g(x)$, de grau menor ou igual a 2, de modo a minimizar $\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx$.

6. A norma de um polinômio p é definida como $||p|| = \langle p, p \rangle^{1/2}$, onde $\langle u, v \rangle^{1/2} := \int_0^2 u(x)v(x)dx$.
Determine, dentre todos os polinômios mônicos de grau menor ou igual a 3 (polinômios da forma $x^3 + ax^2 + bx + c$), qual é o de menor norma.

7. (a) Mostre que $g(x) = \frac{3}{4}x$ é o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima a função $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ em $[-1,1]$ segundo o produto interno $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx$.

(b) Determine o polinômio de grau menor ou igual a 3 que melhor aproxima f com relação à esse mesmo produto interno.