UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

BC1419 Cálculo Numérico - LISTA 4 - Interpolação polinomial

(Profs. André Camargo, Feodor Pisnitchenko, Marijana Brtka, Rodrigo Fresneda)

1 Cálculo do polinômio interpolador

1. Conhecendo a seguinte tabela:

x	-1	0	3
$f(x)$	15	8	-1

   a) Determine o polinômio de interpolação usando a fórmula de Lagrange.

   b) Calcule uma aproximação para $f(1)$, usando o item **a)**.

2. Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
e^{3x}	1	1.3499	1.8221	2.4596	3.3201	4.4817

   Calcule $f(0.25)$, onde $f(x) = xe^{3x}$ usando polinômio de interpolação do 2^o grau.

3. Considere a tabela:

x	1	3	4	5
$f(x)$	0	6	24	60

   a) Determine o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.

   b) Calcule $f(3.5)$.

4. Construa o polinômio interpolador, na forma de Lagrange, para a função $y = sen(\pi x)$, escolhendo os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

5. A integral elíptica completa é definida por:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 - k^2 sen^2 x)^{1/2}}.$$

   Por uma tabela de valores desta integral, encontramos:

$$K(1) = 1.5708,\ K(2) = 1.5719,\ K(3) = 1.5739.$$

   Determinar $K(2.5)$, usando polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.

6. Calcular $e^{3.1}$ usando a fórmula de Lagrange sobre três pontos e a tabela:

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

7. Para a seguinte função tabelada:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	29	30	31	62

construa a tabela de diferenças divididas e, usando a fórmula de Newton do polinômio de interpolação, calcule $f(1)$.

8. Seja a função tabelada:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	0	1	-1	0

   a) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton.
   b) Calcular $f(0.5)$.

9. Dada a função tabelada:

x	0	1	1.5	2.5	3.0
$f(x)$	1.0	0.5	0.4	0.286	0.25

   a) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton sobre dois pontos (interpolação linear).
   b) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton sobre três pontos (interpolação quadrática).
   c) Calcular $f(0.5)$, usando os itens **a)** e **b)**.

Lembre-se que a fórmula de Newton do polinômio de interpolação sobre três pontos é igual ao polinômio sobre dois pontos adicionando ao termo de ordem 2. Além disso, o ponto x_0 deve ser comum aos dois polinômios. Portanto, tome cuidado ao escolher os pontos.

10. A função

$$y = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

é dada pela seguinte tabela:

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$f(x)$	∞	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

Através da fórmula de Newton, calcule y para $x = 0.0378$ usando parábola e parábola cúbica.

11. Considerando a função $f(x) = \sqrt{x}$ tabelada:

x	1.00	1.10	1.15	1.25	1.30
$f(x)$	1.000	1.048	1.072	1.118	1.140

Determinar o valor aproximado de $\sqrt{1.12}$ usando polinômio de interpolação de Newton sobre três pontos.

12. A seguinte tabela relaciona calor específico da água e temperatura:

temp. (°)	20	25	30	35	40	45	50
calor espec.	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

Resolver os itens abaixo usando interpolação com polinômio de grau 2:

- o calor específico de água a 32.5°;
- a temperatura para a qual o calor específico é 0.99837.

13. Construa uma tabela para a função $f(x) = \cos(x)$ usando os pontos: 0.8, 0.9, 1.1, 1.2, 1.3. Obtenha um polinômio de grau 3 para estimar cos(1.07).

14. Seja a tabela:

x	-1	0	1	3
$f(x)$	a	b	c	d

e seja $p_n(x)$ o polinômio de Newton que interpola $f(x)$ em -1, 0, 1 e 3. Imponha condições sobre a, b, c e d para que se obtenha um polinômio de grau 2.

15. Dados:

w	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
$f(w)$	0.905	0.819	0.670	0.549	0.449	0.407

x	1	1.2	1.4	1.7	1.8
$g(x)$	0.210	0.320	0.480	0.560	0.780

Calcule o valor aproximado de x tal que $f(g(x)) = 0.6$, usando polinômio interpolador de grau 2.

16. A função

$$f(x) = 0.25x - \frac{1}{2^x}$$

é crescente e troca de sinal em $[0, 3]$. Para aproximar a raiz α de f, podemos utilizar a interpolação inversa, isto é, consideramos os pontos $(y_0, f^{-1}(y_0)), (y_1, f^{-1}(y_1)), (y_2, f^{-1}(y_2))$ e $(y_3, f^{-1}(3_0))$, com

$$y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ e } x_3 = 3$$

e aproximamos α pelo valor do polinômio $\tilde{p}(x)$, no ponto $x = 0$, que interpola f^{-1} nos pontos y_0, y_1, y_2, y_3. Estime α pelo método descrito.

2 Estimação do erro

1. (a) Determine o polinômio interpolador de Lagrange para $f(x) = \text{sen}(x)$, com relação aos pontos de interpolação {0, 1/3, 2/3, 1 } (exiba os cálculos).
   (b) Delimite o erro $E(x) = \text{sen}(x) - p_3(x)$ para x no intervalo $[0, 1]$, sendo $p_3(x)$ o polinômio obtido no item (a).
   (c) Considerando que o algoritmo implementado numa máquina de calcular M determina o valor de $\text{sen}(x)$ com erro menor ou igual a 0.001, os valores obtidos por $p_3(x)$, trabalhando com 3 algarismos significativos são mais precisos que os fornecidos por essa máquina?

2. Calcule o polinômio interpolador de grau menor ou igual a 4 que interpola a função e^x nos pontos $x_i = i,\ i = 0, 1, \ldots, 4$ (use diferenças divididas). Utilize-o para estimar $e^{0.45}$ e estime o erro cometido.

3. O polinômio interpolador de uma função f nos pontos $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ na forma de Lagrange é dado por

$$p_n(x) = L(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i f(x_i)}{x - x_i}$$

,

onde $L(x) := \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ e $w_i, i = 0, 1, \ldots, n$ são os pesos baricêntricos.

   (a) Determine os pesos em relação aos pontos 0, 1/6, 1/2, 1 e utilize-os para determinar o valor do polinômio de grau menor ou igual a 3 que interpola $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ nesses pontos, quando avaliado em $x = 1/3$. Estime o erro entre $p_3(x)$ e $f(x)$ (use que $\pi^4 < 100$).

   (b) Com base na fórmula do erro de interpolação e tendo em vista que a função $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ é periódica de período $T = 2$, qual dos valores $p_3(-0.52)$ ou $p_3(1.48)$ aproxima melhor $\text{sen}\,(1.48\pi)$?

   ($p_3(x)$ denota o polinômio interpolador do item anterior)

4. Desejamos aproximar o valor de $\log_2(5/2)$ por meio de uma interpolação polinomial, usando para tal os valores conhecidos de $\log_2(x)$ nos pontos $x = 1, 2, 4$ e 8. Usando diferenças divididas, calcule os polinômios interpoladores de $\log_2(x)$,

   (a) nos pontos 2 e 4 (linear);

   (b) nos pontos 2, 4 e 8 (quadrático);

   (c) nos pontos $1, 2, 4$ e 8 (cúbico).

   Delimite o erro cometido na aproximação de $\log_2(5/2)$ em cada caso.

5. Calcule o polinômio interpolador de Newton para $f(x) = 2^x$ relativamente aos pontos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Use o polinômio para estimar $\sqrt{2}$ e estime o erro cometido.

6. Dada a tabela:

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	2	12	21

   calcule $f(3)$ utilizando interpolação cúbica. Estime o erro cometido, sabendo-se que f é um polinômio mômico de grau menor ou igual a 4.

7. Suponha conhecidos os valores de $f(x) = xe^x$ apenas nos pontos 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 e 1. Deseja-se calcular $f(0.5)$ com erro inferior a 10^{-3} por meio de interpolação por alguns desses pontos.

   (a) Mostre que isso não será possível usando interpolação linear (utilizando um polinômio de grau menor ou igual a 1).

   (b) Utilize interpolação cúbica para obter $f(0.5)$ com a precisão desejada.

8. Dada uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, podemos aproximar a integral $\int_a^b f(x)dx$ pela integral do polinômio $p_2(x)$ de grau menor or igual a 2 que interpola f nos pontos a, $\frac{a+b}{2}$ e b. Utilizando a Fórmula de Lagrange para o polinômio interpolador, determine w_0, w_1 e w_2 tais que

$$\int_0^2 p_2(x)dx \;=\; w_0 f(a) + w_1 f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + w_2 f(b).$$

9. (a) Determine o número de pontos necessário para aproximar a função $f(x) = e^{3x}$, no intervalo $[0, 0.4]$, com 7 casas decimais corretas, utilizando interpolação sobre pontos igualmente espaçados.

   (b) Determine o número de pontos necessário para aproximar a função $f(x) = xe^{3x}$, no intervalo $[0, 0.4]$, com 7 casas decimais corretas, utilizando interpolação sobre pontos igualmente espaçados.
   Dica: Mostre que $f^{(k)}(x) \;=\; k3^{k-1}e^{3x} + 3^k xe^{3x}$.

10. Considerando a função $f(x) = \sqrt{x}$ tabelada

x	1.00	1.10	1.15	1.25	1.3
$f(x)$	1.000	1.048	1.072	1.118	1.140

   (a) Determinar o valor aproximado de $\sqrt{1.12}$ usando polinômios de interpolação de Newton sobre três pontos.

   (b) Calcular um limitante superior para o erro.

11. Sabendo-se que a equação $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, determinar o valor aproximado dessa raiz usando polinômio de interpolação de Newton sobre três pontos.

12. Dada a função $y = \text{sen}x$ tabelada

x	1.2	1.3	1.4	1.5
sen(x)	0.932	0.964	0.985	0.997

   (a) Calcular o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton.

   (b) Calcular o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton de diferenças sucessivas.

   (c) Calcular sen(1.35).

   (d) Dar um limite superior para o erro.

13. Dada a tabela

0	1	2	3	4	5	6
-1	α	5	β	7	γ	13

, calcular α, β e γ, sabendo que ela corresponde a um polinômio do terceiro grau. Sugestão: calcule as diferenças sucessivas.

14. Suspeita-se que a tabela

x	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
y	-9.0	0.0	1.0	0.0	3.0	16.0

represente um polinômio cúbico. Como testar esse fato? Explique.

15. Considere a função $f(x)$ dada pela tabela

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	0	0	0

e o polinômio dado por $p(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

(a) Verifique que $p(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

(b) $p(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$sobre os pontos $0, 1, 2$ e 3? Justifique.

16. Mostre que se $p(x)$é o único polinômio de grau n ou menor que toma os valores $y_0, y_1, ..., y_n$ nos $n+1$ pontos $a, a+h, a+2h, ..., a+nh$, então

$$p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-a) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-a)(x-a-h) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h)$$

Dica: expresse as diferenças divididas na fórmula de Newton em termos de diferenças sucessivas.

17. Mostre que a série de Newton para um polinômio de grau n ou menor tem no máximo $n+1$ termos.
Dica: mostre que a diferença dividida de ordem $n+1$ se anula calculando a diferença sucessiva relacionada.

18. A partir da expressão geral para a diferença dividida de ordem k,

$$[y_0, y_1, ..., y_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\omega_k'(x_i)}, \ \omega_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k),$$

verifique a fórmula de recorrência abaixo:

$$[y_0, y_1, ..., y_k] = \frac{[y_0, y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ... y_k] - [y_0, y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_k]}{x_j - x_i}, \ i \neq j.$$

19. Sejam $y = f(x)$ uma função contínua e $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ pontos distintos em seu domínio.

(a) Utilize a diferença dividida $[y_0, y]$, com $x \neq x_0$, para escrever $f(x) = [y_0] + (x-x_0)[y_0, y]$

(b) Utilize a diferença dividida $[y_0, y_1, y]$, com $x \neq x_0, x_1$, para escrever

$$f(x) = [y_0] + (x-x_0)[y_0, y_1] + (x-x_0)(x-x_1)[y_0, y_1, y]$$

(c) Generalize as expressões anteriores para obter $f(x)$ a partir da diferença dividida $[y_0, ..., y_n, y]$

(d) A partir da expressão obtida no item anterior, e da fórmula do erro da interpolação polinomial, obtenha

$$[y_0, ..., y_n, y] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \ \xi \in (x_0, x_n).$$